

या भूतलाचे ठायीं माणी मात्रांचें उत्तम मंकारें करून संरक्षण साधून, तदर्थ जगनि यंत्या परम कृपाळु मनुनें दयालुत्वेन करून अनेक पदार्थ निर्माण केले आहेत. त्यांचा, अधिक किंवा उण्या गरजेनें सर्व आप आपले स्वकडे, उपयोग करून घेतात. विचार दृष्ट्या पाहिले असतां कोणत्याही इतर प्राण्यास अगदीं च न देतां परमेश्वरानें आपले पूर्ण कृपाभरित- औदार्यानें मनुष्यास विचार शक्ति ही अमूल्य देणगी दिली आहे. तेणें करून, मनुष्याने आपले तर्क, शोध व ज्ञान वाढवीत असले पाहिजे, असा सृष्टि कर्त्याचा कृत संकल्प दिसतो.

जगदीश्वरानें उत्पन्न केलेल्या माणी मात्रांचा संरक्षणार्थ पदार्थांत उदक जसें अधिक आवश्यक व महदुपयोगी आहे, तसेंच त्यानें निर्मिलेल्या मानुषीय विचारां सदादिविणा व्यासाधनांत गणित शास्त्र अधिक आवश्यक व महदुपयोगी आहे. गणिताचे योगानें प्रापंचिक व्यवहार चालतो. गणिताचे योगानें द्रव्य वाढणाऱ्या पदार्था चालतात. गणिताचे योगानें शिल्प शास्त्रांतील तखें उघड होतात. गणिताचे योगानें चंद्र सूर्यांची ग्रहणें समजतात. व गणिताचे योगानें पृथ्व्यादि ग्रह नक्षत्राचा गति स्थितीचे शोध लागले आहेत. समुद्राची भरती ओढावी गणितानें समजते. हवेंतील फेरफार गणितानें समजतात. डोंगर व जमिनी यांचा मोजण्या गणितानेंच करितां येतात. पंचांग गणितानें करितां येते. फार काय सांगावे, आपले शास्त्रा ममाणें गांवात जाणें, येणें, घरे बांधणें, लग्न मुंजी करणें, महदुद्योगास लागणें, आदिकरून इतक्या कायास मुहूर्त ही गणिताधारेंच घेतात. आणि वास्तविक पाहिले असतां हे जग प्रत्यक्ष गणित व त्याचे उपांग साधारण अनुमान या दोहोंचा योगा



य आह च आहे. मग तो राजा असो किंवा रंक असो. अत्यंतरी गणिता  
असल्या विना आपला (मनुष्याचा) व्यवहार चालावयाचा ना  
ही. या गणित शास्त्राचा महत्वा विषयीं असें वर्णिलें आहे.

### श्लोक.

शास्त्रे दुर्जीनि फळ सर्व देखा ॥ वादींच त्याचा उपयोग लेखा ॥  
मत्स्य हे ज्योतिष शास्त्र याची ॥ चंद्रार्क देती वर साक्षि साची ॥ १ ॥  
सारांश ज्योतिष ह्मणजे गणित शास्त्र अत्युपयोगी आहे; यास्तबद्द  
होता आपल्या बहादर इंग्लिश सरकारानें मोठ मोठ्या विद्वान लोकांस  
आम्रय दिल्यावरून त्यांनीं या विषयावर अनेक भाषेंत ग्रंथ लिहिले,  
आणि त्यांचा समज सर्वांस होऊन मजेनें ज्ञान संपन्न व्हावे, म्हणून भा  
षांतरादि अनेक उपाय करून तेच विषय उत्तम स्थेस येत जावे, आ  
णि तेणें करून सर्वांस बाल्यावस्थेंतच या ज्ञानवर्धक विषयाचें अ  
ध्ययन होऊन त्या पासून होणारा जो अनुपम लाभ तो मात होत नावा  
म्हणून मोठ मोठ्या बाहारांतून विद्यालये स्थापून विद्वान गुरूंचा हारे दे  
या लु सरकार ज्ञान वृद्धीचें काम चालवीत आहे; परंतु अधिक अभ्यास  
करण्यास किंवा केलेल्या अभ्यासाचा दृढी करणास ग्रंथ संग्रहाची आ  
वश्यकता विद्येस असून कित्येक सुलांस वगणित प्रिय लोकांस मोठ्या  
किमतीचे ग्रंथ गरिबीमुळे घेव वत नाहींत; तेणें करून, त्यांचा आचाभ  
गवबुदील कर्तव्यगारीचा प्राया मजबुदीस कमी असा होतो. तर त्या सर्वां  
स घेण्यास फलभ होऊन त्यांचा सदुद्योगाची धांव पुढें वाढत असावी,  
या हेतूनें मी ग्रंथ करावयास पुढें सरलों.  
हा ग्रंथ सांमत चालू असलेल्या गणिताचा पुस्तकांस माजी पडण्या करितो,  
किंवा त्यावर कडी चढविण्या करितो; अथवा आपली मति द्या मिरविण्या करि

ते एकापुस्तकांत मिळायें अशी इच्छा २, नवीन ग्रंथकारास सरकारचें उ-  
त्तेजन ३, आणि गरीब लोकांचा या कामांतील गैरसोईचे निवारण ४,  
असे चार उद्देशा मनांत आणून मी या कामास हात घातला.

गणिताचें प्रसिद्ध असलेल्या ग्रंथांचें मूलतत्त्व हेंच माझा चाचोम  
जली इमारतीचें सामान होय. तरी मी स्वतांचा शहाणपणाचा डों-  
लानें जडी बुटी किंवा नकशी काम करून मागील कारागिरांचें को-  
शल्य छपविले, असें नाही. एवढें मात्र केलें कीं, त्यावरील अडचण रू-  
पी पडदा काढून व कोठें कोठें पाण्याचा हात फिरवून, उजेडांत आणि  
लें व अधिक स्वच्छ करून त्या करवीं बालकांचें मन ओट लें जावें अ-  
सें केलें. व मी आपल्या भ्रमानें यः कश्चित् निर्मिलेलीं बाहुली त्यांतच  
परंतु ओळखूं येतील अशीं निराळीं ठेविलीं आहेत. हाणजे मूळ ग्रंथां-  
तील प्रत्येक प्रकरणा प्रकरणाचा व्याख्या व उपपत्ती, त्याच प्रकारें  
लिहून त्यां समज बुटी आणण्या करितां त्या त्या विषयावर इतर सं-  
स्कृतादि भाषेंतील आधार मिळाले ते त्या खाली लिहून तत्संबंधीं  
आपले अभिप्राय खाली टिपे मध्ये दाखल केले आहेत व माझ्यानें  
करवला तितका हा ग्रंथ मी बालबोध केला आहे यांत अंकगणित,  
बीजगणित, लाघतम व रेखागणित या सर्वांचा संग्रह असून क-  
ठीण विषय उपपत्तिसहित लिहिले आहेत. व हा ग्रंथ सर्वांस सु-  
लभ उपायें करून उपयोगी पडून ज्ञान वृद्धीचें काम अधिक उमेदी-  
नें चालावें हाणून किंमत १॥ रुपया ठेविली आहे. ही यांतील प्रत्येक भा-  
गावर जे पूर्वी झालेले ग्रंथ आहेत त्या सर्वांचे किमती शीं आणि या  
किमती शीं तारतम्य भावानें पाहूं लागलें असतां ही किती अल्प आ-  
हे हें सहज ध्यानांत येईल.



याचा विचार करितां प्रकरणा प्रकरणाचा रीतीचा मागील ग्रंथा-  
ल पाह्याक १, या कामी खर्च होणाऱ्या द्रव्यावरील नफा खंडाह-  
णाचें भाखंड ३ या तीही वर कदाक्षतेवावा अशी माझी खात्री झाली  
कारण पाह्याक कमी करून रीति थोडक्यांत लिहिल्या तर हे तुत्तरी  
मुलांचे ध्यानांत येतो, किंमत थोडी आकारली तर घेण्यास उमेद ये-  
व उदाहरणें याचल वस्तु मानिल्या, कांकी सांगणाराचें कौशल्य म-  
माणें त्यांत तहेत-हेचे शोकाहो भेद करितां येतात ह्याणून रीति या अ-  
चल व सार्व कालिक वस्तु समजून त्या विषयींचे आवश्यक विचार  
विस्तृत लिहिले आणि त्यांचीचल अशी जी उदाहरणें तीं बहुत लि-  
हिल्यांत मात्र फारसा भर दिला नाही. सारांजाजा उद्देशीं करून मीं ह्या  
ग्रंथ तयार केला, त्याचा खरोखर उपयोग प्रचारांत यावा ह्याणून मी  
कृपाळु प्रभुची नम्रतेनें प्रार्थना करीत आहे.

या ग्रंथांत व्याकरण दोष, रीतीचा अपुरतेपणा व इतर कांहींचुका  
असतील तर त्या विषयीं विद्वानांनीं मला क्षमा करावी आणि ते म-  
ला सर्व कळवावे, ह्याणजे समयी दुसरी आवृत्ति छापणें झाल्यास  
मी ती सुधारीन.

श्लोक.

(चाल केकावलीची)

मुलां गणित तोष कां रुचिर मिष्ट व्हावे असे ॥  
स्मरोनि हरि पाद हें गणित सार केले असे ॥  
धनें सुलभ सुभमे ह्याणुनि आदराया करी ॥  
विनंति शिवराम त्या तनय भास्कराचा करी ॥ १ ॥



स्त होईल  
ठ ग्रंथांती  
उदाहर  
वी झाली  
हेतुखरी  
उमेद येते  
हास्याम  
ति का अ  
विचार  
हुत लि  
त मीं हा  
पून मी  
हीचुका  
पतें म  
व्यास

# गणितसार.

## अंकगणित.

### भाग पहिला.

### पूर्णिक.

७१३



253244

गणित हाणजे गणण्याची विद्या.

संख्या लिहिण्याचा रीतींत मूळ अंक नऊ आणि एक शून्य आहे.  
वाचक शब्द ... एक, दोन, तीन, चार, पाच, सहा, सात, आठ, नऊ, शून्य.

अंकांचा सुणा. १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, ०

हे नऊ अंक वेगवेगळे असतां, आपआपला अर्थ (किंमत) दाखवितात, परंतु हे जेव्हां एके ठिकाणी संयोग पावतात, तेव्हां स्थानाप्रमाणे आपआपला अर्थ भिन्न दाखवितात.

### उदाहरण.

जेव्हां एकाचा अंक (१) असा एकटा लिहिला आहे, तेव्हां त्याचा अर्थ एकच आणि जेव्हां या अंकाचा उजवीकडे दुसरा अंक या प्रमाणे (११) लिहिला, तेव्हां प्रथम अंक दुसरे स्थान भूत होऊन त्याचा भाव स्वतः एकच नाही, परंतु एक दशक हाणजे दहा असा होतो. आणि हे दोन अंक मिळून भाव अकरा. जर उजवीकडे आणखी या प्रमाणे एक अंक (१११) लिहिला, तर प्रथम अंकाचा अर्थ एकशतक हाणजे शंभर असा होतो.

+ नुसते बघण्याला कांहीं किंमत नाही, परंतु जेव्हां ते अंकावर येते, तेव्हां ते मूळ अंकाची किंमत दसपट करिते.

आणि हे तीन अंक मिळून एकचो अकरा होतात.

अर एकाद्या अंकस्थानांत मूळ अंकनसला. तर त्या बदल राज्य (१)  
असे लिहितात. पुढील कोष्टकांत अंकांचा स्थलभेद करून अर्थ भेद दा  
खविला आहे.

संख्या कोष्टक.

० परार्ध.  
६ मध्य.  
१० अत्य.  
१५ जलधि.  
२० शंकु.  
२५ महापद्म.  
३० निखर्व.  
३५ खर्व.  
४० अज्य.  
४५ दशाकोटि.  
५० कोटि.  
५५ दशलक्ष.  
६० लक्ष.  
६५ दशसहस्र.  
७० सहस्र.  
७५ शतं.  
८० दहं.  
८५ एकं.

अथवा.

० दशपद्म.  
१ पद्म.  
२ दशासर्व.  
३ सर्व.  
४ दशश्र्व.  
५ अश्व.  
६ दशकोटि.  
७ कोटि.  
८ दशलक्ष.  
९ लक्ष.  
१० दशसहस्र.  
११ सहस्र.  
१२ शत.  
१३ दह.  
१४ एक.

एक हाणजे एक अंकस्थान. १ पासून ९ पर्यंत कोणतीही संख्या. दहा हाणजे दोन अंकस्थाने. १० पासून ९९ पर्यंत जाणावी. शत हाणजे तीन अंकस्थाने. १०० पासून ९९९ पर्यंत. याप्रमाणे पुढे ही जाणावी. हे कोष्टक विद्यार्थ्यांस मुखोद्गत उलटसुलट येत असावे.

वाच्यसंख्या. वाचकशब्द.

३०५००१४०२३	तीन अन्न पांच कोटि चवदा हजार बेंबीस.
७१०००५००१०५	सात खर्व एक अन्न पांच लक्ष एक शें पांच.
३०००३१०००२७	दोन निखर्व ऐशी कोटि एक तीस लक्ष सत्ता बीस.

अथवा.

३५ पत्नीस.

५१२ पांचशेंबारा.

४०१५ चारहजारपंधरा.

५०२०३ पन्नास हजार दोनशेंतीन.

६०४११३ सहालक्ष चार हजार एकशेंतेरा.

९०५०३०९ नवदलक्ष पन्नास हजार तीनशेंनऊ.

३४५१६००५ तीन कोटी पंचेचाळीस लक्ष सोळा हजार पांच.

४८०००३००१ अठ्ठेचाळीस कोटि तीन हजार एक.

७०१००००५१० सात अर्ब एक कोटि पांचशेंदाहा.

या वाचक वाच्यंवर दृष्टि न देतां, केवळ अंक संख्या वाचावी. तसेंच  
अंकावर दृष्टि न देतां, वाचक वाच्यं वरून अंक संख्या मांडीत जावी.

## मिळवणी.

मिळवणी ह्मणजे वेगळाल्या संख्यांची एकंदर बेरीज करणे.

### रीति.

वेगळाल्या संख्या एक स्थानी एक, दह स्थानी दह, शत स्थानी शत, अशा  
रीतीने लिहाव्या; नंतर शेवटचे संख्ये स्थानी एकरेघ काढावी; आणि स्वा  
लचे संख्ये पासून सर्व संख्यांचे एक स्थानचे अंक एकत्र मिळवून, त्यांत  
पहिला अंक असेल, तो एकचे स्थानी रेघे स्थानी मांडावा. राहिला दुसरा  
अंक दह तो हातचा समजून, तो दह स्थानचे सर्व अंक मिळून, त्यानी  
ल पहिला अंक दहचे स्थानी लिहावा; दुसरा अंक असल्यास, तो हात



चा समजून शतं च स्थानांत मिळवावा या ममाणें मिळवितां, बोवटी-  
अंक येईल, तो तसाच लिहावा; ह्यणजे एकंदर बेरीज झाली.

### उदाहरणें.

(१) एका घरांत ४ पुरुष, ६ बायका आणि ८ मुलें आहेत, तेव्हां एकंदर मनुष्यें किती?

उत्तर, १८ मनुष्यें.

(२) एका तारवाची किंमत १०३९ रुपये आणि त्यांतील मालाची किंमत २९३ रुपये. तेव्हां मालासह त्या तारवाची किंमत किती?

१०३९  
२९३

### तपशील.

१०३९ तारवाची किं० } ३ आणि ९ मिळून १२ ह्यणजे एक दशक आ  
२९३ मालाची किं० } णि २ एक वास्तव २ रे घे रवालीं एकचे स्थळीं  
१२३ एकंदर रुपये. } मांडावे; आणि उरलेला १ दह हातचा, तो  
आणि ९ मिळून ११, १० आणि ३ मिळून १३, यांतील पहिला अंक ३ दहं,  
तो दहं चें स्थानी मांडून, हातचा एक शतं, तो व २ मिळून ३ शतं, ते शतं चें  
स्थानी मांडावे, बाकी एक सहस्राचा एक सहस्र.

अथवा २ आणि ९ बारा, बारी २ हातचा एक दशक १ आणि ९ बारा,  
१० आणि ३ तेरा, तेरी ३, हातचा एक शतक १ आणि २ तीन, तिहीं चें  
तीन, एकाचा एक.

### ताळा.

प्रथमरीति - जसे खालून वर अंक मिळविले, तसे वरून खाली मिळवावे, तेच अंक आले तर बेरीज खरी.

+ नुसते यंत्र्याला स्वतः काही किंमत नाही म्हणून तें जर एकादे अंकांत मिळविलें अथवा त्यांत एकादा अंक मिळविला तर, काही फेर फार होत नाही.

**दुसरी रीति-** बेरीज कैल्यानंतर वरची अथवा त्यांतील कोणतीही एकरकम सोडून, बाकी रकमांची बेरीज घ्यावी; नंतर त्या बेरजेची सोडलेली रकम मिळवावी, आणि बेरीज पूर्व बेरजे बराबर आली हा णजे बेरीज खरी.

(१)

उदाहरणें.

(२)

४९०५३२३६०३

२०३९८०३०७

२८०७९११०३९

७८६५०४३२

७९९५८६५३८१

३०९०५४१७७८

७९९५८६५३८१

६८३००५०००

१८९७८१२३

९३७५०२५

१४००५७०८१

८५१४१५२२९

५६८४१०३२९

८५१४१५२२९

बेरीज

मध्यमरकम सोडून बे.

सोडलेली रकम मि. बे.

**तिसरी रीति-** प्रत्येकरकमेंतील अंकांचे बेरजेतून जितके वेळां नऊ निघतील तितके वेळां काढून त्या सर्व बाक्यांचे बेरजेतूनही नऊ नऊ टाकावे, बाकी राहिलेले अंक व बेरजेचे अंकांचे बेरजेतून नऊ नऊ टाकून राहिलेले अंक बराबर येतील तर बेरीज खरी.

**टीप.** यारीतीस हा एक बाध आहे की, बेरजेत काही नवाचे अंक अथवा जांची बेरीज नऊ होते असे अंक किंवा शून्ये कमी अथवा जास्त पडलीं असतां चूक समजणार नाही, असेंच वजा बाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांचे ताळ्या विषयी समजावे.

उदाहरणें.

(१)

नऊ टाकून बाकी.

(२)

३६७५६३ ..... ३

५५९०९ ..... १

३५०१५४ ..... ०

७७३६२६ ..... ४

८ ..... ८५६४०३

२ ..... ९७२०९२

१ ..... ३४१८८४

२ ..... २१७०३७९

(६)

यातीनरीतींत पहिलीरीति बांगली.

अभ्यासाकरिता

उदाहरणे.

(१) ५७९३४१, ३५९२७९८, ७३२१५४५, ३६८६१५२, २५६१३ यांची बेरीज कर.

(२) ३६९८७६, ५४३९८७३, ८७४३२९, ८६१७२७५ यांची बेरीज कर.

(३) ९८७५४२३५, ७९८५४२६, २९८१५३२, ४५६८३६४ यांची बेरीज कर.

(४) कृतयुग १७२८०००, त्रेतायुग १२९६०००, द्वापारयुग ८६४०००, कलियुग ४३२००० वर्षे तेव्हां चारही युगांची एकंदर वर्षे किती होतील.

(५) हाखालील कोष्ठक बेरजे करिता आहे, यांत आडव्या उभ्या ति कीस इत्यादि आठआठ कोष्ठकांतील अंकांचा बेरजा घेतल्या असता दोरोवर अशा बेरजा २०० हून जास्त होतील.

६३९४१३	९७२७२८	२८१४०८	५४०६५३	६२७०६८	९८५०७३	२९३७५३	५२८३०८
४७८९१८	३४३१३३	८३६९३३	७७५२०८	४९१२७३	३३०७८८	८९४५८८	७८७५५३
९३५६९३	६७६४४८	५७७६८८	२४४३७३	९२३३४८	६८८७९३	५९००३३	२३२०२८
३८०१६८	४४१८९३	७३८१७३	८७३९६८	३९२५१३	४२९५४८	७२५८२८	८८६३१३
६५१७५८	९६०३८३	२६९०६३	५५२९९८	६९४७२३	९९७४१८	३०६०९८	५१५९६३
४६६५८३	३५५४७८	८४९२७८	७६२८६३	५०३६१८	३३८४४३	८१२२४३	७९९८९८
९४८०३८	६६४१०३	५६५३४३	२५६७१८	९११००३	७०११३८	६०३३७८	२१९६८३
३६७८२३	४५४२३८	७५०५१८	८६१६२३	४०४८५८	४१७२०३	७१३४८३	८९८६५८



## वजाबाकी.

वजाबाकी ह्यणजे दोन रकमांचें अंतर समजण्यासाठीं एकारकमें तून दुसरी रकम काढणें. या अंतरास बाकी असें म्हणतात.

### रीति.

दोही संख्यांमध्ये जी मोठी असेल, ती वर मांडावी, आणि लहान असेल ती तिचे खाली, एक खाली एक, दहा खाली दहा, अशा क्रमानें मांडून, खाली रेघ काढावी; नंतर खालचे संख्येंतील उजवे कडचा शेवटील अंक त्याचा वरचा अंकांतून बाद करून, बाकी राहील ती रेघेखाली मांडावी. या प्रमाणें डावे कडे करीत चलावें. जर खालचा अंक वरचा अंकापेक्षा अधिक असेल, तर वरचे अंकाचे डावे कडील स्थानचा एक ह्यणजे या स्थानचे दहा उसने घेऊन वरचा अंकांत मिळवावे, आणि त्यांतून खालचा अंक बाद करून बाकी काढावी. दहाक उसना घेतला आहे, तो हातचा एक खालचा रकमेंतील दुसऱ्या अंकांत मिळवून तो वरचे अंकांतून बाद करावा. या प्रमाणें शेवट पर्यंत करीत जावें.

कोणत्याही संख्येंतून शून्य वजा केलें असतां, त्या संख्येंत कांही बदल होत नाही; परंतु शून्यांतून कोणतीही संख्या वजा केली असतां, अंकांचा बदल न होता, चिन्हाचा मात्र बदल होतो. या विषयीं विचार दुसरे भागांत आहे.

+ उसना घेतला दहाक तेव्हांच त्या स्थानांतून वजा करावा हा उक्त मपक्ष, परंतु त्यांतून दुसरे अंक वजा करावयाचे असतात; याजकरितां त्यांत हा दहाक मिळवून एकदम वजा केल्यातरीं चालेल.

(८)

## उदाहरणें.

(१) २५८३२ यांतून ९८६१ हे वजा कर. (२) ३६७८९२० मो. सं.  
२५८३२ मोठी संख्या. ९७३३२६ ल. सं.  
९८६१ लहान सं. २७०५५९४ बा.  
१५९७१ बाकी.

(३) शिवाजी राजा सन १६२७ त जन्मला, आणि त्यास राज्याभिषेक १६७४ त झाला, व तो १६८० त मेला. त्यास सन १८५८ मध्ये जन्मून, व राज्याभिषेक होऊन, व मरून, किती वर्षे झाली? व जन्मल्या पासून किती वर्षांनी राज्याभिषेक झाला? आणि जन्मल्या पासून, व राज्याभिषेक झाल्या पासून किती वर्षांनी मरण पावला? ते सांग.

उत्तर { जन्मून २३१ वर्षे, रा. १८४, म. १७८ }  
{ ज. रा. ४७, ज. म. ५३, रा. म. ६ }

## ताळा.

प्रथमरीति - बाकी लहान संख्येत मिळवावी. ती बेरीज मोठे संख्ये बराबर आली ह्मणजे वजा बाकी स्वरी.

दुसरी रीति - दोन्ही रकमांतील अंकांचे बेरजेतून नऊनऊ ढाकून त्या बाक्यांची वजा बाकी करावी, ही बाकी व मुळचे बाकींतील अंकांचे बेरजेतून नऊनऊ ढाकून राहिलेली बाकी बराबर आली तर वजा बाकी स्वरी. कदाचित् मोठे रकमेची बाकी लहान आली, तर तींत नऊ मिळवून त्यांतून लहान रकमेची बाकी वजा करावी.

## उदाहरणें.

(९)

(१)

२५२५३१४ -- मोठी संख्या.

१६२६९२५ -- लहान संख्या.

८९८३८९ -- बाकी.

२५२५३१४ -- ताळा.

(२) नऊ नऊ टाकून बाकी.

३८९७५६४८ -- ५

९३५३४५० -- १

३९६२३१९८ -- ४

## गुणाकार.

गुणाकार ह्याजे मिळवणीची संक्षेपरीति आहे. अशी की, जितके वेळां एकारकमेंत एक हा अंक आहे तितके वेळां दुसरीरकम मांडून मिळवणी किती होईल हें करणें.

### व्याख्या.

- १ गुणाकारांत तीन पदे आहेत, गुण्य, गुणक आणि गुणाकार.
- २ जीरकम किती एक वेळां मांडावयाची तिला गुण्य ह्याणावे.
- ३ तीरकम जितके वेळां मांडावयाची त्या वेळां कास गुणक ह्याणावे.
- ४ गुणक वेळां गुण्य मांडून त्यांची जी बेरीज त्यास गुणाकार ह्याणावे.

### रीति.

गुण्य आणि गुणक एकस्वलीं एक, दहंस्वलीं दहं असे लिहावे; आणि त्यांस्वलीं रेघ काढावी. मग गुणकाचे एकचे स्थळीं वे अंकांनं सर्व गुण्य गुणून, तो गुणाकार रेघेस्वलीं त्या त्या अंकाचे समोर लिहावा. नंतर याच प्रमाणें दुसरे गुणकाकांनं गुणून तो गुणाकार त्या गुणकाकाचे स्थळाचे स्थळा पासून डावेकडे मांडीत जावा. अशा रीतीने गुणकांनं एकला एकंनं गुणिलें असता, गुणाकार एक, दहंनं गुणिलें असता दहं, शतंनं



क. जितक असताल, तितक्या गुणाकाराची पक्क झाली. नंतर त्याचा  
लीं रेघ काढून त्या सर्व पंक्तींची वैरीज घ्यावी, ह्मणजे गुणाकार झाला.  
पुढें लिहिलेलें बीस अंकांचे कोष्ठक दादा पर्यंत संख्यांचे गुणाकार दा  
खवितात. ते मुलांनी तोंड पाठ करावें.

### कोष्ठक

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४	२६	२८	३०	३२	३४	३६	३८	४०
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६	३९	४२	४५	४८	५१	५४	५७	६०
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८	५२	५६	६०	६४	६८	७२	७६	८०
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०	६५	७०	७५	८०	८५	९०	९५	१००
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२	७८	८४	९०	९६	१०२	१०८	११४	१२०
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४	९१	९८	१०५	११२	११९	१२६	१३३	१४०
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६	१०४	११२	१२०	१२८	१३६	१४४	१५२	१६०
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८	११७	१२६	१३५	१४४	१५३	१६२	१७१	१८०
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०	१३०	१४०	१५०	१६०	१७०	१८०	१९०	२००

लेखें, अक की, एकोत्री, पाव की, निम की, पाउण की, इत्यादि हे सर्व गुणा  
कार आहेत; जसे सत्राचौक ६८ ह्मणजे सत्राचार वेळां, तसें तेरासबें १८.  
ह्मणजे सवा ही रकम तेरा वेळां घेतली. तसेंच बत्तीस बत्तीस १०२४ ह्म  
णजे बत्तीस वेळां बत्तीस घेतले. याज करितां हे सर्व गुणाकार अवश्य  
ध्यानांत ठेविले पाहिजेत.

शून्याला कोणत्याही संख्येनें गुणिलें असतां, गुणाकार शून्य; कार

गुणिलें असतां शत होतो; याज करितां गुण्यांतील एकेला गुणांतील जाजात्या  
नचे अंकांनें गुणावें त्या त्या स्थानचा गुणाकार होतो, ह्मणून तो त्या त्या स्थानापा  
सून मांडण्यास आरंभ करावा.

स्येला शून्यानें गुणिलें असतां शून्य.

शून्याला शून्यानें गुणिलें असतां, गुणाकार शून्य, ह्मणजे शून्य वेळां शून्य ह्मणजे कांहीनाही.

जर गुण्यवगुणक किंवा यांतून कोणत्याही संख्येचे उजवेकडे कांहीशे न्यें असतील, तर त्या शून्यां वांचून बाकी मागील अंकांचा गुणाकार करावा आणि त्यागुणाकारावर त्याच्या स्थानाची तितकी शून्यें मांडावी.

उदाहरणें.

(१) ६९५१२ हे गुण्य यांस ३६५ चा गुणकानें गुण.

६९५१२ हे गुण्य.

३६५ गुणक.

३ ४ ७ ५ ६ ०

४ ९ ७ ० ७ २

२ ० ० ५ ३ ६

२ ५ ३ ७ ९ ० ० ०

गुणाकार.

(२)

(३)

४२५ ... गुण्य ... ०

० ... गुणक ... २९७

० ... गुणाकार ... ०

(४)

(५)

० ... गुण्य. .... ४३००

० ... गुणक. .... ३५००

० ... गुणाकार. .... २९५

१२९

गुणाकार. १५०५००००

ताळा.

प्रथमरीति. गुण्याचे ठिकाणीं गुणक, आणि गुणकाचे ठिकाणीं गुण्य मांडून गुणाकार करावा, दोन्ही गुणाकार बराबर आले तर गुणाकार खरा.

**दुसरी रीति-** गुण्य आणि गुणक यांतील अंकांचे बेरजेतून जित के वेळां निघतील तितके वेळां नऊनऊ बाद करून, दोन्ही बाक्या गुणा व्याः या गुणाकारांतील व पूर्वीचा गुणाकारांतील अंकांचे बेरजेतून पृथक् पृथक् नऊनऊ बाद करून दोन्ही बाक्या बराबर आल्या तर गुणार स्वरा.

**तिसरी रीति-** गुण्य किंवा गुणक यांतील एका पदानें गुणाकार भागिला असतां, दुसरे पद निघेल तर गुणाकार स्वरा; परंतु हे भागाकार शिकल्या पूर्वी समजावयाचें नाहीं.

### उदाहरणें.

(१)

अथवा

६४४०१	...	गुण्य	.....	५६७४
५६७४	...	गुणक	.....	६४४०१
२५७६०४				५६७४
४५०८०७				३२६२६
३८६४०६				३२६९६
३२२००५				३४०४४
३६५४९९२७४		गुणाकार	.....	३६५४९९२७४

### गुणाकाराविषयीं आणखी विचार.

(१) जर गुणक मोठा असेल, आणि त्याचे गुण्य गुणकरूप दोन अथवा अधिक अवयव होतील, तर करावे, नंतर एका अवयवानें गुण्यास गुणून त्या गुणाकारास दुसरे अवयवानें गुणावे, याप्रमाणें जित के अवयव असतील त्यांनीं गुणावे असे १ रुपयाचे १६ आणे, तर २४ रुपयांचे किती होतील चौहोंस सहानीं गुणिलें असतां २४ होतात,

किंवा आठांस तिहींनीं गुणिलें असतां २४ होतात, याज करितां सोळां  
ला मध्यम ४नीं गुणून, त्या गुणाकाराला ६नीं गुणावें; किंवा मध्यम ३नीं  
गुणून नंतर ८नीं गुणावें.

(२) जर गुणकाचे गुण्यगुणकरूप अवयव बराबर होत नाहीत, तर  
त्याहून कमी किंवा जास्त अवयव अंकाचे गुण्यगुणकरूप अवयव क  
रून, त्यांणीं वर सांगितल्या प्रमाणें गुणावें. नंतर ते अवयव कमी अं  
काचे झाले असल्यास, तो अंक गुणकापेक्षां किती कमी असेल, ति  
तके अंकांनें गुण्यगुणून तो गुणाकार पूर्वगुणाकारांत मिळवावा. आ  
णि जास्त अंकाचे अवयव झाले असल्यास वजा करावा.

### उदाहरणें.

(१) ५३९३२५ हे गुण्य यांस ५८ या गुणकानें गुण. एथें ५८ हा गुणजे ७  
वेळां आठ अधिक २ ते द्या.

$$\begin{array}{r}
 ५३९३२५ \\
 \times ७ \\
 \hline
 ३७७५२७५ \\
 \times ८ \\
 \hline
 ३०३०२९०० \\
 \times ५८ \\
 \hline
 ३०३०२८५०
 \end{array}$$

हा इच्छित गुणाकार.

(२) ४०३५ हे गुण्य यांस  
२५६ या गुणकानें गुण.

$$\begin{array}{r}
 ४०३५ \\
 \times २५६ \\
 \hline
 ३३२८० \\
 \times ५ \\
 \hline
 २०१८०० \\
 \times २० \\
 \hline
 ८०६८०० \\
 \hline
 १०३२९६०
 \end{array}$$

गुणाकार.

(३) ७४३९ हे गुण्य यांस ६१ या गुण  
कानें गुण.

$$\begin{array}{r}
 ७४३९ \\
 \times ६१ \\
 \hline
 ४४६०९६ \\
 \times ६० \\
 \hline
 ४४६३५७ \\
 \hline
 ४५३७७९
 \end{array}$$

हे वजा

गुणाकार.

या दोन हीरीतींनीं सांगितल्या प्रमाणें केलें ते गुणाकारास संक्षेप अथवा तुकडी  
गुणाकार म्हणतात.



## कोष्ठकीगुणाकारः

उदाहरणांत लिहिल्या प्रमाणें गुण्यगुणक मांडून, गुणाकार करावा. कोणत्याही अंकांनं गुणतेवेळीं गुणाकार एकच अंक आल्यास तो कोष्ठकांत उजवीकडे लिहावा, आणि दुसरा अंक आल्यास त्याच कोष्ठकाचे दुसरे भागांत डावीकडे लिहावा. गुणाकारास आरंभ करणें तो गुणकाचे भारी अंक स्थळा पासून करावा. बेरीज करणें ती समोरन करितां तिर्कस पंक्तीची करावी.

## उदाहरणें.

५४३२१६७-हे गुण्य यांसे ३६७ या गुण काने गुण.

[illegible]

१९९ ३ ६ ० ५ ५ ८ २ ६ गुणाकार.

(२) १४९१२७ हे गुण्य यांस ७९२८ या गुणकानें गुण.

उत्तर. ११८२२७८८५६

बैठागुणाकार.

बैठ गुणाकार ह्यणजे मध्येक स्थानचा गुणाकार एकदम पुराक  
रीत जाणं. या गुणाकारांत हा एक लाभ आहे की, गुणकांतील अंक  
संख्ये इतक्या गुणाकाराचा पंक्ति होत नाहीत.

सीति-

गुण्यांतील एकचा स्थानाला गुणांतील एकचा स्थानानें गुणावें.

गुणाकार एकं स्थला खाली मांडावा, हातचा आल्यास तो दहं, निरा  
वा मांडावा, आणि गुणकांतील दहंने गुण्यांतील एकं मास व गुण्यां  
तील दहंने गुणकांतील एकं मास गुणून, दोन गुणाकारांची बेरीज  
घेऊन, त्यांत हातचा मिळवून बेरीज येईल तो दहं, त्यांतील मध्यम  
अंक दहं खाली मांडून हातचा आल्यास तो शतं, नंतर शतचा स्थान  
चे जितके गुणाकार उत्पन्न होतील, तेव हातचा अंक मिळवून त्यांती  
ल मध्यम अंक शतं चें स्थानी मांडावा. हातचा येईल तो सहस्र या ममा  
णें करीत जावे. खाली उदाहरणांत तपशील केला आहे तो पहा.

### उदाहरणे.

(१) ४३१८ हे गुण्य यांस १३२ या गुणकानें गुण.

४३१८ गुण्य.	
१३२ गुणक.	
<u>४०२४३७६</u> गुणाकार.	
तपशील.	
१६	
१	हातचा दशक.
२४	
२	
२७	
२	हातचें शतक.
७२	
३	
६	
<u>८३</u>	

८	हातचें सहस्र.
९	
९	
८	
३४	
३	हातचें दशसहस्र.
२७	
१२	
४२	
४	हातचें लक्ष.
३६	
४०	

(२) ३८५७१२ हे गुण्य यांस ३४०६८ या गुणकानें गुण.

उत्तर-१३१४३१६१८

## ज्योतिषी गुणाकार.

ज्योतिषी गुणाकार हा वैठ्या गुणाकारा प्रमाणेच आहे. भेद इतकाच की, वैठे गुणाकारात अतिहलके अंक स्थाना पासून प्रत्येक स्थानचा गुणाकार पुरा करीत जाणें; आणि यांत भारी अंक स्थाना पासून प्रत्येक स्थानचा गुणाकार पुरा करीत जाणें. स्वाली उदाहरणांत तपशील केला आहे, तो पहा. परंतु गुणाकार करतवे वेळीं असा तपशील करीत नाहीत; गुणाकार गुण्याचे ओळीस जेव्हांचे तेव्हांच मांडून हातचे ही लागलेच मिळवितात. यांत प्रति स्वेपेस गुण्याचें डावे कडील एके क स्थान पुसून गुणाकाराचें पहिलें पद त्या त्या स्थानीं मांडितात.

### उदाहरणें.

(१) ४३६५ हे गुण्य यांस २५३ या गुणकारनें गुण.

$$\begin{array}{r} ४३६५ \text{ गुण्य.} \\ २५३ \text{ गुणक.} \\ \hline ११०४३४५ \text{ गुणाकार.} \end{array}$$

तपशील.

$$\begin{array}{r} २१२ \\ ८०४३६५ \\ २५३ \\ \hline १ \\ ६५९ \\ १०९२४६५ \\ २५३ \\ \hline ३१ \\ १२०८ \\ १०८०४५ \\ २५३ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} २१ \\ १०५५ \\ ११०२०८५ \\ २५३ \\ \hline ११०४३४५ \text{ गुणाकार.} \end{array}$$

(२) ३४१२ वर्षांचे दिवस किती रज  
र एक वर्षाचे ३६० तर.

उत्तर. ११२८३२०

+ असा तपशील करीत समजण्यासाठीं मात्र एथें केला आहे.

(१) ४८४६० यांस १३८, १५७६, ६४९६७ या गुणकांनीं गुण.

(२) ३४५६७६७ यांस ४५३२, ७३२६, ९८०३५, १८५७१३, ५७१३, ५७६०००

या गुणकांनीं मत्थेकीं गुण.

(३) एक पैशास १३ आंबे आणि ७ केळीं मिळतात. तर ३२ पैशास किती मिळतील?

उत्तर ४१६ आंबे आणि २२४ केळी.

(४) एक मिन्युटेत एक मनुष्य बंदुकीचे चार आवाज काढितो, या ममा ये ४३२ मनुष्ये तीन अवर (१८० मिन्युटे) पर्यंत लढत असतां एकंदर किती आवाज काढतील?

उत्तर ३११०४० आवाज.

(५) एक देवळाची मरदक्षिणा ६३५२ पावले आहे. आणि एक मनुष्य त्या देवळास दररोज ११ मरदक्षिणा घालितो, तर नऊ दिवसांत तो किती पावले चालेल. व त्याच्या किती मरदक्षिणा होतील?

उत्तर ६२८८४८ पावले आणि ९९ मरद.

## भागाकार.

भागाकार ह्मणजे वजाबाकीची संक्षेप रीति आहे. एका संख्येमध्ये दुसरी संख्या किती वेळां आहे, अथवा तीतून किती वेळां निघत्ये हे पहाणे, यास भागाकार ह्मणावे.

या वजाबाकीत मुळची दोन पदे असतात आणि त्यांचा सून दुसरी दोन उत्पन्न होतात, मिळून चार. त्यांची नावे: भाज्य, भाजक, भागाकार



आणि बाकी.

व्याख्या.

१ जा रकमेंतून दुसरी रकम किती वेळां वजा होते हें पाहावयाचें तिला भाज्य ह्मणावें.

२ जी वजा करावयाची तिला भाजक ह्मणावें.

३ भाज्यांतून भाजक जितके वेळां वजा झाला, त्या वेळां कास भागाकार ह्मणावें.

४ भाजक वजा होत नाही, असा जो भाज्याचा अंश राहातो, त्यास बाकी ह्मणावें.

रीति.

प्रथम भाज्य मांडून त्याचा डावेकडे) असें चिन्ह करून, भाजक मांडावा; नंतर भाज्यातील पहिला अंक जर भाजकांतील पहिले अंकापेक्षा लहान आहे, तर भाजकांत जितकी अंक स्थळे आहेत, त्यां पेक्षां भाज्यांत एक अंक स्थळ अधिक ठेवून, तेथें गुण करावी आणि जर तो मोठा आहे, तर अंक स्थळ बराबरच ठेवावी; आणि भाजकांतील पहिला अंक भाज्यांतील पहिले अंकाचा मोठेपणा मुळे किंवा लहानपणा मुळे एक अथवा दोन अंक घेऊन, त्यां वून किती वेळ जातो तें पाहावें; आणि तो वेळांक भागाकार स्थळी ह्मणजे भाज्याचा उजवेकडे) असें चिन्ह करून त्यांत मांडावा; नंतर त्या अंकांनें भाजकांतील सर्व अंक गुणून, तो गुण कदाचित् भाज्यातील दोन अंक भाजकांतील दोन अंकां बराबर असून निसरा अंक जर लहान असेल तरी ही एक स्थळ भाज्यांत जास्त घ्यावें; याप्रमाणें तीन चार इ. अंक बरोबर असून पुढील अंक लहान असल्यास करावें.

आणि बाकी वर भाज्यातून वरचा एक अंक घ्यावा तो नवा भाज्य होईल,  
 कदाचित् हा भाज्य भाजकापेक्षा कमी झाल्यास भागशून्याचा लावून  
 त्याजवर भाज्यांतील वरचा एक अंक घ्यावा. तो नवा भाज्य असेल  
 मजून त्यास भाजकाने भागून भागाकार पूर्ण भागाकारावर मांडावा  
 अशी कृति भाज्यांतील सर्व अंक संपत पर्यंत करावी. दर वेळेस जी वा  
 की राहात्ये ती भाजकापेक्षा कमी राहिली पाहिजे. दोबरी जी बाकी राही  
 ल ती भागाकारापुढे मांडून त्याखाली रेघ काढावी आणि खाली भाजक  
 मांडावा.

कोणत्या हीरकमेने शून्य भागिले असता भागाकार शून्य कारण को  
 णती हीरकम शून्यातून वजा होत नाही.

कोणत्या हीरकमेला शून्याने भागिले असता भागाकार अनंत.

शून्याला शून्याने भागिले असता भागाकार शून्य अथवा काही तरी  
 सात पदे आहे.

+ अ कोणती ही संख्या आणि ब, क, ड, ई, फ, इत्यादि संख्या अनुक्रमे अचे बराबर,  
 अर्धी, चवथी, आठवा हि सा इ. असतील तर त्यांचे अनुक्रमे भागाकार ब) अ(१,  
 क) अ(२, ४, ८, १६, इत्यादि यावरून पहाता, भाज्य एक असून भाजक ज  
 सजसा लहान होईल, त्या प्रमाणे भागाकार मोठा होतो म्हणून भाजक फार  
 च लहान झाल्यास भागाकार फारच मोठा होतो तसे भाजक (०) म्हणजे अनंत  
 लहान तेव्हा भागाकार अनंत मोठा हे सिद्ध.

॥ अ कोणती ही संख्या असेल तर (०) आणि अयांचा गुणाकार (०) वरील  
 नियमाप्रमाणे आता गुणाकाराला गुण्याने भागिले असता गुणक होतो,  
 याजकरिता गुणाकार शून्य यांस गुण्य (०) याने भागिले असता भागाकार  
 गुणक म्हणजे एथे (अ) आहे तेव्हा शून्याला शून्याने भागिले असता भा  
 गाकार (०) अथवा काही तरी सात पदे येतो हे सिद्ध.



## उदाहरण.

३४६२५०२ हे भाज्य यांस ५१८ या भाजकानें भाग.

भाजक. भाज्य भागाकार.

५१० ) ३४६२५०२	( ६६८४	१९०
३१००		५१०
३५६५		
३१००		
४३७०		
४१४४		
२२६२		
२०७२		
१९० बाकी.		

**ताळ्या.**

प्रथमरीति- भागाकाराने भाजक गुणून त्यांत भागाकाराची वाकी असल्यास मिळवावी. ती बेरीज भाज्याचे बराबर आली तर भागाकार बरो.

दुसरी रीति- जसें प्रथमरी तीत अंकांला गुणिलें व मिळविलें, त्याम  
नाणें त्या रकमांतील अंकांचें बेर जेंतून नऊनऊ द्याकून गुणावें व मिळवावें,  
आणि त्यांतील अंकांचें बेर जेंतून नऊनऊ द्याकून उरलेला अंक व भाज्या  
तील अंकांचें बेर जेंतून नऊनऊ द्याकून उरलेला अंक हेजर बराबर येतील तर  
भावाकार सरा.

उदाहरणें.

(१) ३५० हे भाज्य को ३१२ या भाजकाने भाग.

11)  $34 \frac{10}{12}$

३९  
१२  
३४८  
१०  
३५८

(२) ४८५२६ हे भाज्ययांस २३५ या भाजकाने भाग.

२३५) ४८५२६ (२०६ भागाकार.  
 ४७०  
 १५२६  
 १४१०  
 ११६ बाकी.

~~9 + 9 = 18~~

**प्रथमरीति.** भाजक वीस अंका पावतो असला, तर पूर्वी प्रमाणें लांब तपशील न करितां वर सांगितल्या प्रमाणें भाज्य भाजक मांडून, भाज्या चे खालीं रेष काढावी; नंतर पूर्वी सांगितल्या प्रमाणें भाजक जाई असा भाज्यांक मनांत घेऊन, गुणाकार आणि वजा बाकी मनांतच करून रे चे खालीं भागाकार लिहावा आणि बाकीवर वरचा एक अंक मनांतच घेऊन वर प्रमाणें करावें.

### उदाहरणें.

<p>(१)</p> $\begin{array}{r} 12) 843812 \\ \underline{35105} \end{array}$	<p>(२)</p> $\begin{array}{r} 12) 936208 \\ \underline{42096} \end{array}$
---	---

**दुसरीरीति.** जेव्हां भाजक दोन किंवा अधिक संख्यांचा गुणाकार आहे तेव्हां भाज्यास त्यांतील एका अवयवानें भागून, त्या भागाकारास दुसरे अवयवानें भागावें या प्रमाणें जितके अवयव असतील, तितक्यानीं भागावें, शेवटील भागाकार येईल तो इच्छितेला भागाकार होईल.

**टीप.** सगळ्या भाजकानें भागून जी बाकी राहात्ये, ती ह्या वेगळ्या वाक्या पासून काढायाची रीति अशी आहे की, शेवटील बाकी उपां त्य भाजकानें गुणावी, आणि त्या गुणाकारांत त्याचा वरची बाकी मिळवावी. या प्रमाणें सर्व भाजक आणि वाक्या यांणीं समग्र बाकी काढावी.

### उदाहरणें

+ उपां त्य भाजक ह्याणजे शेवटील भाजकचा पूर्वीचा भाजक.





(१) ७११४६९२ यांस १६-यांणीं अ० त्याचे गुण्य गुणकरूप अवर  
३,७,८-यांणीं भाग.

$$\begin{array}{r} ३) ७११४६९२ ( २३७१५६४ ( ६७८३८९१४ ( ३७८४२३४९ ( ६०१६८ \end{array}$$

२ शेवटील बाकी.

७ उपांत्य भाजक.

१४

६ दुसरी बाकी.

३०

३ वरील भाजक.

६०

६ वरील बाकी.

६०

६० समग्र बा.

(२) १५३७८०५ यांस ५१२ यांनी भाग.

उत्तर. ३००३  $\frac{३६९}{५१२}$

तिसरी रीति. जेव्हा भाजकाचे उजवे कडे कांहीं शून्यें असतील,  
तेव्हा तीं कापून नाहीत असें मनांत आणावे. शून्यें जितकीं असतील,  
तितके उजवे शेवटाकडील भाज्यांक कापून ते नाहीत असें मनांत आ  
णावे, नंतर त्या शून्ये रहित भाजकानें तो भाज्य कापल्या पर्यंत भागा  
वा. भागाकार होऊन बाकी राहिल, तिजवर ते कापलेले भाज्यांक मांडा  
वे आणि त्याचे खाली भाजक मांडून त्यावर तीं कापलेलीं शून्यें मांडावीं.

उदाहरणें.

(१) ६४१३८१७ यांस ४३०० यांनी भाग.

$$\begin{array}{r} ४३००) ६४१३८१७ ( १४९१ \frac{३५१७}{४३००} \end{array}$$

४३

३११

१७३

३९३

३८७

५६

४३

३५१७ बाकी.

चवथीरीति- गुणाकार वेगळाले उत्पन्न होतात, ते न लिहितां वा  
क्या मात्र लिहाव्या. ह्यणजे पूर्वी प्रमाणें भाजकास भागाकार अंका  
नें गुणावें. आणि त्या गुणाकाराचे वेगळाले अंक जसजसे उत्पन्न हो  
तात, तसतसे ते लागलेच वरचे भाज्यां कांतून वजा करून बाकी रवा  
लीं लिहावी; परंतु हें लक्षांत ठेविले पाहिजे कीं, जे हातचे दशांक घेतले  
असतील, ते पुढील अंकांचे गुणाकारांत मिळवावे.

### उदाहरणें.

(१) १३१८८२४ यांस १८५ यांणी भाग.

१८५) १३१८८२४ ( ७१२८  $\frac{१४४}{१८५}$  भागाकार.

३३८

५३२

१६२४

१४४ बाकी.

(२) ६५३२६ यांस ३६५ यांणी भाग.

उत्तर. १७८  $\frac{३५६}{३६५}$

### भांजणी.

भांजणी ह्यणजे संख्येची किंमत तरीच ठेऊन नाम आणिरूप  
पालटण्याचा प्रकार.

ही भांजणी प्रायशः पैका, तोल, माप, देश, कालादि मान यांचे का-

भात घेतात. हिचे दोन प्रकार आहेत. चढती भांजणी आणि उतरती भांजणी.

जेव्हा भारी नामाची संख्या हलक्या नामांत आणायाची आहे, तेव्हा तीस उतरती भांजणी ह्मणतात, तसेंच हलक्या नामाची संख्या भारी नामांत आणायाची आहे, तेव्हा तीस चढणी भांजणी ह्मणतात.

भांजणीची रीति सांगण्या पूर्वी पैका, तोल, माप, देश, आणि काल मान यांचे मानाचे कोष्टक, सांगतो. हें तोड पाठ करावे.

### पैक्याचे कोष्टक.

दक्षिण पैक्याचा कोष्टक.

४ कबड्या,	ह्मणजे १ गंडा.
२ गंडे,	===== १ टोली.
२ टोल्या,	===== १ दमडी.
४ दमड्या,	===== १ पैसा.
४ पैसे,	===== १ आणा.
४ आणा,	===== १ पावळा.
४ पावळे,	===== १ रुपया.
४ १/२ रुपये,	===== १ दोन.
१ रुपय,	===== १ पुतळी.
१ पुतळ्या,	===== १ मोहोर.

विलायती पैक्याचा कोष्टक.

२ फार्दिंग,	ह्मणजे १ हाफपेनी.
४ फार्दिंग,	===== १ पेनी.
१२ पेन्स,	===== १ शिलिंग.
२० शिलिंग,	===== १ पोंड.
५ शिलिंग,	===== १ क्रोन.
२१ शिलिंग,	===== १ गिनी.
२७ शिलिंग,	===== १ मार्केडर.
४ पेन्स,	===== १ ग्रोट.

+ कबड्या आणि पैसे कधी कधी बाजार भावानुळे उणे अधिक होतात.

\* पेन्स हे पेनी शब्दाचे बहुवचन.

x पोर्तुगीस नाणे आहे.

१२ पै, हणजे	१ आणा.	२० विस्रे किंवा	} = १ रुका, पै.
१६ आणे, =	१ रुपया.	२३ दाम	

सरकारी रीतीचा दुसरा कोष्ठक.	इंग्रजी आणि मराठी या दोन पैक्या
२५ रेस, हणजे १ आणा.	चे बरो बरीचा कोष्ठक.
४ आणे, = १ पावला.	१० रुपये, हणजे १ पोंड.
४ पावले, = १ रुपया.	१ अर्धरुपया, = १ शिलिंग.
	८ पै, = १ पेनी.

इंग्रजी सोने रुपें तोला याचा त्रायचा कोष्ठक.

२४ ग्रॅम, हणजे १ पेनिवेट.

२० पेनिवेट, = १ ओंस.

१२ ओंस, = १ पोंड.



सोने, रुपें इत्यादि तोला याचे कोष्ठक.

पुणे-चाली ममाणें.	मुंबई-चाली ममाणें.
४ उडिद, हणजे १ गुंज.	३३ बाल, हणजे १ मासा.
८ गुंजा, = १ मासा.	४० बाल किंवा
१२ मासे, = १ तोळा.	१२ मासे. } = १ तोळा.
२४ तोळे, = १ शेर.	



व्यापसंतील साकर, तेल, तूप इत्यादि तोलायाचें  
कोष्ठक.

पुणे-चाली ममाणें.		मुंबई-चाली ममाणें.	
८ गुंजा, हणजे	१ मासा.	८ गुंजा, हणजे	१ मासा.
१२ मासे, _____	१ दोळा, टांक	१२ मासे, _____	१ तोळा.
७२ टांक, _____	१ पक्का शेर.	२० तोळे, _____	१ शेर.
४० शेर, _____	१ मण.	४० शेर, _____	१ मण.
२ १/२ मण, _____	१ पळा.	२० मण, _____	१ खंडी.
८ पळे किं० २० मण	१ खंडी.	१ टांक _____	२४४८ ग्राम.

दक्षिण महाराष्ट्र देशातील तेल, तूप, इंग्रजी वैद्या-चा कोष्ठक.  
तोलायाचा कोष्ठक.

२४ तोळे, हणजे	१ कच्चा शेर.	२० ग्रॅन हणजे	१ स्कूप.
५ कच्चे शेर, _____	१ पासरी.	३ स्कूप, _____	१ ग्राम.
२ पासऱ्या, _____	१ धडा.	८ ग्राम, _____	१ ओंस.
४ धडे, _____	१ मण.	१२ ओंस, _____	१ पौंड.
२० मण, _____	१ खंडी.		

मोती तोलायाचे कोष्ठक.

पुणे-चालीचा.		मुंबई-चालीचा.	
१६ तंडुल, हणजे	१ रती.	१२ टुके, हणजे	१ रती.
२४ रती, _____	१ टांक.	२४ रती, _____	१ टांक.

मराठीरीती ममाणे.

८ यव,	हणजे	१ अंगुल.
१४ अंगुळे,	=====	१ हात.
४ हात,	=====	१ दंड.
२००० दंड,	=====	१ कोस.
२ कोस,	=====	१ गव्युति.
२ गव्युति,		१ योजन.

इंग्रजीरीती ममाणे.

३३ भेयव,	हणजे	१ इंच.
१२ इंच,	=====	१ फुट.
३ फुटी,	=====	१ यार्ड.
५६ यार्ड,	=====	१ मील.
४० मील,	=====	१ फर्लांग.
८ फर्लांग,		१ मैल.

चौरस जमीन मोजणीचे कोष्टक.

मराठीरीती ममाणे.

८ यव	हणजे	१ अंगुल.
४ अंगुळे,	=====	१ मुष्टि.
३ मुष्टि,	=====	१ वीत.
२ वीत,	=====	१ हात.
५६ हात अ. ३५ मुष्टि.	=====	१ काठी.
२० काठ्या.	=====	१ पांड.
२० पांड.	=====	१ विघा.
१२० विघे,	=====	१ चादूर.

इंग्रजीरीती ममाणे.

१४४ चौरस इंच.	हणजे	१ चौरस फुट.
९ चौरस फुटी.	=====	१ चौ. यार्ड.
३० १/४ चौ. या.	=====	१ चौ. मील.
४० चौ. मील,	=====	१ रुट.
४ रुट.	=====	१ एकर.

तोच सामत पैसाच चालीचा.

१६ आणे,	हणजे	१ गुंठा.
४० गुंठे	=====	१ गकर.

घन मोजणीचे कोष्टक.

+ मील हणजे महाराष्ट्र देशाची काठी. :: एक आणा हणजे ७ १/२ यार्ड जवळ आहे.

## मराठीरीतीममाणें.

५१२ घनयव,	हणजे	१ घ० अंगुळें
६४ घ० अंगु,	=====	१ घ० मु०
२७ घ० मुष्टि,	=====	१ घ० बी०
८ घ० विती,	=====	१ घ० हान.

## इंग्रजीरीतीममाणें.

१७२० घनइंच,	ह्य०	१ घ० फूट.
२७ घनफुटी,	=====	१ घ० गार्ड
१६६ $\frac{२}{३}$ घनगार्ड,	=====	{ १ राद किंवा घनकाठी.

## ध्यान्यादि मोजायाचें मापाचें कोष्ठक.

## पुणेंचालीचा

४ पाव,	हणजे	१ शेर.
२ शेर,	=====	१ अधोली.
२ अधोल्या,	=====	१ पायली.
+ १२ पायल्या,	=====	१ मण.
२ $\frac{३}{४}$ मण,	=====	१ पक्षा.
८ पळे किंवा	}	१ रंडी
२० मण		

## मुंबईचालीचा.

२ टिपय्या,	हणजे	१ शेर.
२ शेर,	=====	१ अधोली.
२ अधोल्या,	=====	१ पायली.
† १६ पायल्या,	=====	१ फरा किंवा मण.
२० मण,	=====	१ रंडी.

## तांबे, कथील इत्यादि तोलायाचा कोष्ठक.

८ गुंजा,	हणजे	१ मासा.
१२ मासे,	=====	१ टांक.
७२ टांक,	=====	१ पक्का शेर
१६ शेर,	=====	१ मण.

+ हें वारुळें माप. † हें सोळुळें माप.

## इंग्लंडातील मापांचे कोष्ठक.

धान्यादि मोजायाचा.

२पेट, ह्मणजे	१ कार्ट.
२कार्ट, =====	१ पटल.
२पटल, =====	१ ग्यालन.
२ग्यालन, =====	१ पेक.
४ पेक, =====	१ बुशल.
८ बुशल, =====	१ कार्टर.
५ कार्टर, =====	१ वे.टन.
२ वे.टन, =====	१ लास्त.

पातळपदार्थ मोजण्याचा.

२ पेट, ह्मणजे	१ कार्ट.
४ कार्ट, =====	१ ग्यालन.
४२ ग्यालन, =====	१ तीर्स.
१ $\frac{१}{२}$ तीर्स, =====	१ हाण्ड्रेट.
२ हाण्ड्रेट, =====	१ पेंप. बट,
२ पेंप. =====	१ टन.

## वरघ, काष्ठ मोजणीचे कोष्ठक.

मराठीरीतीप्रमाणें,

२ अंगुळे, ह्मणजे	१ तसू.
१२ तसू, =====	१ हात.
२ हात, =====	१ गज.

आवार्डुगार्डिसचा कोष्ठक.

१६ द्राम. ह्मणजे	१ ओंस.
१६ ओंस. =====	१ पोंड.
२० पोंड, =====	१ कार्टर.
४ कार्टर, =====	१ हन्नपेट.
२० हन्नपेट, =====	१ टन.

या वजनानें जड पदार्थ तोलतात.

इंग्रजीरीतीप्रमाणें.

२ $\frac{१}{२}$ इंच, =====	१ नेल
४ नेल, =====	१ पावयार्ड
४ पावयार्ड, =====	१ चार्ड.

वर्तुळपरिघाचे मापाचा कोष्ठक.

६० विकळा, ह्मणजे	१ कळा.
६० कळा, =====	१ अंश.
३६० अंश, =====	१ परीघ.

सुंबईतील मीठ मोजायाचे मापाचा को.

१० $\frac{१}{२}$ अधोव्या, =====	१ फरा.
१०० फरे, =====	१ आणा.
१६ आणे, =====	१ रास.

मराठी कालमानाचा कोष्ठक.

६० पळे, ह्यणजे १ घटिका.  
 २ घटिका, = १ मुहूर्त.  
 ३३ मुहूर्त, = १ महर.  
 ८ महर, = { १ अहोरात्र,  
 दिवस.  
 १५ दिवस, = १ पक्ष.  
 २ पक्ष, = १ मास.  
 २ मास, = १ ऋतु.  
 ३ ऋतु, = १ अयन.  
 २ अयने, = १ वर्ष.

मराठी आणि इंग्रजी या दोन  
 कालमानाचे बरोबरीचा को.  
 २४ सेकंद, ह्यणजे १ पळ.  
 २३ पळे, = १ मिन्यूट.  
 २४ मिन्यूटे, = १ घटिका.  
 २३ घटिका, = १ अवर.  
 ३ अवर, = १ महर.

+ प्रतिचवथे वर्षीया महिन्याचे २९ दिवस होतात.

इंग्रजी कालमानाचा कोष्ठक.

६० सेकंद, ह्यणजे १ मिन्यूट.  
 ६० मिन्यूटे, = १ अवर.  
 २४ अवर, = १ दिवस.  
 ७ दिवस, = १ उडक, आठवडा.  
 ४ आठवडे, = १ मास.  
 १२ मास }  
 १ दिवस } = १ वर्ष.  
 ६ अवर }

इंग्रजी महिने व त्याचे दिवस यांचा को.  
 १ जानेवारी, चे ..... ३१ दिवस.  
 २ फेब्रुवारी, ..... २८ दि.  
 ३ मार्च, ..... ३१ दि.  
 ४ एप्रिल, ..... ३० दि.  
 ५ मे, ..... ३१ दि.  
 ६ जून, ..... ३० दि.  
 ७ जुलै, ..... ३१ दि.  
 ८ ऑगस्ट, ..... ३१ दि.  
 ९ सेप्टेंबर, ..... ३० दि.  
 १० ऑक्टोबर, ..... ३१ दि.  
 ११ नोवेंबर, ..... ३० दि.



## उत्तरतीभांजणी. रीति.

भारी नावाचे संख्येतील एकांत निव्या जवळच्या हलके नावाचे अवयव जितके आहेत, तितक्या अंकांनी ती पूर्व संख्या गुणावी; आणि तींत त्या नावाचे हलके अंक असतील, ते मिळवावे, नंतर त्या नावाचे एकांत त्याचे जवळचे हलके अवयव किती असतील, त्यांनी ती बेरीज गुणून त्यांत त्या नावाचे अंक असतील, ते मिळवावे या प्रमाणें दोबटप रीत करावें.

### उदाहरणें.

(१) २१५ रुपये ३ आणे ९ पैया  
च्या पै किती होतील?

$$\begin{array}{r} \text{रु० आ० पै.} \\ २१५ \dots ३ \dots ९ \\ \underline{१६} \\ ३४४३ \text{ आणे.} \\ \underline{१२} \\ ४१३२५ \text{ पै. हे उत्तर.} \end{array}$$

(२) ५ वर्षे २ मास ४ दिवस.  
९ अवरयाचे अवर किती  
होतील?

$$\begin{array}{r} (४) २५ बिघे ५ पांड ७ काठया ३ हा  
त १ बीत २ सुष्टि ३ अंगुळें ४ यव  
यांचे यव किती होतील?  
बि. पां. का. हा. बि. सु. अ. य.  
२५ \dots ५ \dots ७ \dots ३ \dots १ \dots २ \dots ३ \dots ४ \\ \underline{२०} \qquad \qquad \underline{३} \\ ५०५ \text{ पांड.} \qquad \qquad ५ \\ \underline{२०} \\ १०१०७ \text{ काठया.} \\ \underline{३५} \\ ६) ३५३७४५ (३ सु \\ ५०९५७ \\ \underline{३} \\ ५०९६० \text{ हात.} \\ \underline{३} \\ ११७९२३ \text{ बिती.} \end{array}$$

उत्तर, ८८७११२ इंच.

उत्तर, ५७७ इंच.

१ सु० २ रु०

उत्तर २०९०३३१६०६००

उत्तर १०२०००३०७०१६०

(३) १० १२३३५ हे यव आहेत  
यांचे मेल किती?

(४) ४६१० पैट यांचे टन किती?

मै० फ० पो० या० फु० दु० य०  
उत्तर, ४७०६०२६०५०००१००१

ट० पै० हा० ती० ग्या० का० पैट०  
उत्तर, २०००००१०३१०१००

## • विविध मिळवणी.

विविध मिळवणी हाणजे एका जातींत विविध नामाचा अनेक रकमा  
ची बेरीज करणे

### रीति.

रकमा मांडण्याची व बेरीज करण्याची रीति साध्या मिळवणी ममा  
णेंच आहे, हाणजे जानावाचा जो अंक तो त्या नावाखाली लिहावा, परं  
तु मस्येक नावाचें स्थान निरनिराळें करावें.

रकमांचे शेवटील हलके नावांचे अंकांची बेरीज घ्यावी, नंतर त्या बेर  
जेस त्याचे वरील भारी नावाचे एकंत हे अंक किती आहेत त्याणीं भागू  
न भागाकार येईल तो हातचा ठेवून बाकी त्या हलके नामाखाली मांडा  
वी नंतर तो हातचा अंक त्याचे जवळचे भारी नावाचे अंकांत मिळवून  
पूर्ववत् करावें.

### उदाहरणें.

(१) ३४१२, ६११ आणि ९४२०  
यांची बेरीज कर

(२) १२ गज १ हात १ तसू व ११ गज  
६ तसू यांची बेरीज कर



सह० शतं दह० एक०

३ .. ४ .. १ .. २

६ .. १ .. २

१ .. ४ .. २ .. ८

१३ .. ४ .. ५ .. २ हेउत्तर.

(३)

सं० म० जो० तो० मा० गुं०

५ .. १७ .. २३ .. ३ .. ५ .. २

१ .. ० .. २१ .. २५ .. ७ .. ५

५ .. ८ .. २७ .. ३ .. ० .. ७

१२ .. १३ .. २४ .. १५ .. ३ .. ०

२५ .. ० .. १६ .. १९ .. ४ .. ६ उत्तरं

ग० हा० त०

२२ .. १ .. ९

१२ .. ० .. ६

३५ .. ० .. ३ हेउत्तर.

(४)

पों० शि० पे० फा०

९ .. १३ .. १० .. २

१ .. ० .. ५ .. १

१८ .. ७ .. ९ .. ०

२५ .. १८ .. १० .. ३

५५ .. ० .. ११ .. २

विविध मिळवणीचा ताळा साध्या मिळवणीचा ताळ्याचा पहिल्याव  
दुसऱ्या रीतीत सांगितल्या प्रमाणे.

## विविध वजाबाकी.

विविध वजाबाकी ह्मणजे, एका जातीत विविध नामाचा एका रकमेंतून  
दुसरी रकम काढणे.

## रीति.

विविध मिळवणीत सांगितल्या प्रमाणे, रकमा मांडाव्या. त्यांत मोठी  
रकम वर मांडून लहान खाली मांडावी आणि त्या खाली रेंघ काढावी.  
नंतर खालचे रकमेचे उजवे कडचा शेवटील अंका पासून आरंभ करा

वा. तो अंक त्याचे वरचे अंकांतून बाद करून, बाकी राहिली मांडावीजर मोठ्या रकमेंतील एकाद्या नामाचा अंक खालचे अंकापेक्षा लहान असेल, तर त्याचा जवळचा मोठ्या नामापासून एक अंक हातचा घेऊन उतरत्या भांजणीचे रीतीने त्या अंकाचे खालचे जातीचे हलके अंक करून त्यांत त्या जातीचा वरील अंक मिळवून, मग वजा बाकी करावी. तो घेतलेला हातचा अंक त्याचे जवळचे वजा करावयाचे भा. री अंकांत मिळवून वजा करावा.

### उदाहरणे.

(१)

यो. ग. को. द. हा. अं. य.

५००००१०५२३२२५

१०१०१०००३५२

३०००१०१०३३२१३ उत्तरें. ५०१०१०००३००१

(२)

ट. पैप. हा. ती. ग्या. का. पै.

१४०१०००१३१३१

८०१०१०१०३०३००

(३) कोणी एक मनुष्य ज्येष्ठ शक ३ शके १७५२ रोजी जन्मला. आणि कार्तिक शक ९ शके १७६९ रोजी त्याचे लग्न झाले. पुढे श्रावण शक ५ शके १७७० रोजी त्यास पुत्र झाला. तेव्हां त्या दिवशी त्याचे वयास किती वर्षे बलग्न झाल्यास किती वर्षे झाली?

व. म. दि.

१७७७०० ४ ५

१७५१०० २ ३

वयास २६ २ २

व. म. दि.

१७७७०० ४ ५

१७६९०० ७ ९

उत्तरें ०००००० २६ लग्नास.



विविध वजाबाकीचा मोळा साध्या वजाबाकीचे पहिले रीतीममाणे.

## विविध गुणाकार.

विविध गुणाकार हाणजे अनेक नामाचा अंकांची रकम अनेक वेळां आली तिची वेरीज घेणे.

### रीति.

गुण्य रकमेचा शेवटील हलक्या नावाचा अंका खाली गुणक मांडून त्याचे खालीं रेघ काढावी; नंतर तो शेवटील अंक त्या गुणकानें गुणावा; नंतर त्या गुणाकारास त्याचे वरील भारी नावाचे एकांत हे अंक किती आहेत त्याणीं भागून भागाकार येईल तो हातचा ठेवून बाकी त्या हलके नामा खाली मांडावी. नंतर त्याचे जवळचा दुसरा अंक त्याच गुणकानें गुणून त्यांत हातचा मिळवून पुढे शेवटपर्यंत प्रवृत्त कृति करावी.

### उदाहरणें.

जर कोणी मनुष्य दररोज १४ मैल ७ फलिंग २ पोळ ३ चार्ड २ फुटी इतका चालतो तर १५ दिवसांत किती चालेल?

मे. फ. पो. या. फु.

१४ .. ७ .. २ .. ३ .. २ गुण्य

१५ गुणक

२१३ .. २ .. ० .. ० .. ० गुणाकार होउत्तर.

## गुणाकार संक्षेप.

प्रथमरीति. जर गुणक विसांपेक्षा अधिक असेल, तर सगळ्या गुणकानें एकदम न गुणितो, तुकडी गुणाकाराचे प्रथम रीतींत सांगि

तल्या प्रमाणें त्याचे गुण्यगुणक अवयवांचीं गुणावे.

**दुसरी-** जर गुणक विसां पेक्षा अधिक असून त्याचे गुण्यगुणक अवयव बरोबर होत नसतील, तर तुकडी गुणाकाराचे दुसरे रीतींत सांगितल्या प्रमाणें गुणावे.

### उदाहरणे.

(१) १२ वर्षे ५ मास ३ आठवडे  
२ दिवस ४ अबर यांस २८ यांणीं  
अथवा त्याचे गुण्यगुणकरूप  
अवयव ७, ४ यांणीं गुण.

व० मा० आ० दि० अ०  
१२०० ५०० ३०० २०० ४००  
७०० १०० ३०० १०० ४००  
३००० वजा.  
८७०० १०० २०० ४०० १०० वा. लु.  
४०००  
३४००० ६०० २०० ३०० १०० स. गु.

(२) २ योजने १ कोस १५५९ हंड  
२ हात २१ अगुके यांस पांच यां  
णीं गुण.

यो. ग० को० ह० अ०  
उत्तर. १२०००० १०००० २०००

(३) १४ गज १ हात ५ तसू १ अंगूळ  
यांस ३४ अथवा ८ वेळां ४ अधिक  
२ यांणीं गुण.

ग० हा० त० अ०  
१४०० १०० ५०० १००  
११००० १०००००  
४७१०००००००  
२९०००११००० दोन वेळां गुण्य  
५००००१०००० गुणाकार.

(४) ३ रास ५ जाणे २१ फरे ३ अ  
धोली यांस ७ यांणीं गुण.

रा० आ० फ० अ०  
उत्तर. २३०००००००००

विविध भागाकार हणजे विविध नामाचे संख्यांचे रकमेस कोण-  
त्या ही सांगितले संख्येने भागणें.

## रीति

सरळ भागाकार रीती प्रमाणें भाजक भाज्याचे डावे कडे मांडून, नंत  
र डावे कडून आरंभ करावा, आणि भाज्यांतील अत्यंत भारी नामाचा  
अंक भाजकानें भागून, जो भागाकार येईल, तो त्याचे खाली मांडावा,  
बाकी राहिल्यास तीस उतरत्या भाजणीचे रीती प्रमाणें जवळचे हल  
क्या नावाचे अंकांत आणून, भाज्यांत या नावाची कांहीं संख्या अ-  
सल्यास ती यांत मिळवून, ती बेरीज पूर्व भाजकानें भागावी; भागा-  
कार येईल, तो त्याचे खाली मांडावा, आणि त्याची बाकी राहिली, त-  
र तिचे जवळचे हल के नावाचे अंकांत तिला आणून, पूर्व रीतीनें क-  
रावें. या प्रमाणें पुढे ही करून, बाकी शेष ही अति हल के संख्ये जवळ  
मांडावी.

याचा ताळा सरळ भागाकाराचे प्रथम रीती प्रमाणें.

## उदाहरणें.

(१) ९ वर्षे १ अयन २ ऋतु १ मास १ पक्ष ८ दिवस ७ महर २ मुहूर्त  
१ घटिका ५५ पळे हे भाज्य यांस = या भाजकानें भागा.

व० अ० ऋ० मा० प० दि० म० मु० घ० प०

=) ९-१-२-१-१-८-७-२-१-५५

उत्तर. १-०-१-०-१-१४-१-२-१-१८

यांस ५ यांणी भाग.

पों. वि. पे.  
उत्तर ११... १०... २३

स ४८ यांणी भाग.

गु. आ.  
उत्तर १५... १०... १५

## भागाकार संक्षेप.

जर भाजक विसांपेक्षा अधिक असून त्याचे गुण्य गुणक अवयव बरोबर होत असतील, तर करून त्यांणी तुकडी भाकाराचेरी ती प्रमाणे भागाकार करून बाकी काढवी.

## उदाहरणे.

(१) १२१ खंडी १५ मण ९ पाय  
त्या ३ शेर २ पाव यांस ६२ यां  
णी अथवा त्याचे गुण्य गुणक  
रूप अवयव ७१९ यांणी भाग.

खं. म. पा. शेर. पा.

७) १२१... १५... ९... ३... ३

९) १७... ७... १५... ०... २... ० बाकी

१... १८... १०... २... १-१ बा.

१... १८... १०... २... १३ उत्तर.

(२) १२ पौंड २ ओंस १२ पेनिवेट  
२० ग्रेन यांस २४ यांणी अथवा  
त्याचे गुण्य गुणक रूप अवयव  
४, ६ यांणी भाग.

पों. ओं. पे. ग्रे.

४) १२... २... १२... २०

६) २... २... १२... ५

०... ६... १२... ४-५

१... ६... १२... ४-३०

## विविध जातीचा मराठी प्रकार.

हा पहातां भाजणी व अपूर्णक यांचा भाग आहे, परंतु व्यवहारत याचा खाली लिहिलेला यारीतीने उपयोग करितात; संपूर्ण तीरी



ति एथें लिहितों.

### रेघांची मिळवणी.

ही मिळवणी सांगण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांस रुपये, पावले, आणे इत्यादि व खंडी, मण, पायल्या, इ० मांडितां याव्या ह्याणून एथें थोडीशी सूचना लिहितों. रुपयांचे अंक लिहितात, पावल्याची १० अशी रेघ लिहितात, व आणा १०० असा लिहितात. पाव आणा १०० असा लिहितात. पाव आण्यावर पैसे असल्यास त्यांचा अंक लिहितात. हल्लीं सरकारा मध्ये लिहिण्याचा सांप्रदाय निराळा आहे, तो असा. रुपयांचा अंक घालून त्यावर १० अशी अळी आणि तिजवर आण्याचा अंक घालून पुनः अळी घालावी. तिजवर पैसेंचा अंक घालावा. खंडी, मण इत्यादि बेरजेचा वेळेस उदाहरणांत मांडिलें आहे. त्याप्रमाणें मांडावें. यांत जीं पदे नसतील, त्यां बहुल अंकासाठीं इत्य आणारे पैसे साठीं अळी बहुत करून मांडण्याचा सांप्रदाय आहे.

### रीति.

वर सांगितल्याप्रमाणें रुपये, पावले, इत्यादि मांडणें झाल्यावर त्यांसाठीं, दुसऱ्या रकमा मांडून खातीं रेघ काढावी. नंतर दोवडील अति हलके नामाचा सजातीय रेघा अथवा अंकांची मिळवणी करावी नंतर त्या मिळवणीस त्याचे बरील भारी नावाचे एकांत हे किंवा ह्या किती आहेत त्यांणीं भागून भागाकार येईल तो हातचा ठेवून, बाकी रेघेसाठीं मांडावी. नंतर तो हातचा अंक त्याचे अवळखे भारीत मिळवून पूर्ववत् करावें.

### उदाहरणें.



रुपये	रुपये.	कैलीवारोंके
(१) २५॥३१ १७॥३२ १॥१ ३॥॥२ १३६६२ १२५३॥ २५॥॥६२	(२) २२७२६४ १७७४६६ ६९० ३६६६६ १३६६२ १२२६७६६ २१२७२६२	(३) २३॥११॥५॥३ ६११॥॥ ६६५॥॥ १॥॥॥॥॥ ६६६२ १॥॥॥१६६ २७६७१॥३
कैलीसोकुलें.	विद्यावणी	वजनअष्टाविशी.
(४) ३॥॥३॥॥ ६५१॥॥ ॥॥५१॥३ ३॥॥५॥॥	(५) १५॥२३११॥१ २५॥६१॥१ ६१॥३॥४ ३॥॥७१॥११	(६) ११॥३॥॥२ १२६५॥५॥२ ॥॥॥॥॥॥४ ३०॥३॥६६
सोनैरुपें	तांके	कालमान.
(७) १३॥१॥॥॥ ६५१॥॥ १६६७॥॥ ३५॥१॥॥॥	(८) ६१॥३॥॥४ ६२६५॥२ १॥॥५॥११ ६३॥१॥२	(९) १७६७६३९ १३६६६२७ १६२६६२ ३२६६६९

### रेघांचीवजाबाकी.

मिळवणी प्रमाणें दोन्ही रकमा मांडाव्या. त्यांत मोठी रकम वरमां  
डून लहान खाली मांडावी, आणि खाली रेघ काढावी; नंतर दोवटील  
अति हलक्या सजातीय रेघा अथवा अंक यां पासून वजाबाकीसमा  
रंभ करावा. जर एकादे जातीचा रेघा किंवा अंक वरील रेघा किंवा अंक  
सांतून वजा होत नसतील तर विविध वजाबाकींत संगितल्या प्रमा  
णें करून वजाबाकी करावी.

### उदाहरणें.

रुपये. (१) २१७॥३॥२ १३१॥१॥१ ८५॥१॥१	रुपये. (२) २१४ ८११८८ १३१ ८१३८१० ८२८१३८१०	कैलीवारोळे. (३) १६५१॥१॥१- ११७॥१॥२॥१- ८०॥१॥१॥१॥१-
कैलीसोलुळे (४) १७॥१॥१॥१- १०॥१॥१॥३८- ३१३॥१॥१॥१	विधावणी. (५) ११८८७३॥१॥२ १०८॥२३८३॥१॥१ ८५१॥१॥१॥१	वजनी. (६) १३८५॥१॥३ ११॥१॥२॥१॥२ १६७॥६८८
कालमान. (७) १८८८८८ १३ ८८८८८ १८८८८८	तोळेवार. (८) १५११॥१॥१॥१ ११॥१॥२॥१॥२ ३११॥१॥१॥१॥१	पक्केवर्जन तांबे कथी. इ. (९) १७५॥१॥१॥१ ११॥१॥२॥१॥१ १३१३८८८८८

### रेधांचा गुणाकार.

गुण्य आणि गुणकरेधांसहित किंवा रेधांचाचून आहेत, याजवरून त्यांचे दोन प्रकार आहेत.

रेधांचे गुणाकारांत खाली लिहिलेले नियम लक्षांत ठेविले पाहिजेत.

- (१) कोणत्याही अंकाने रुपयांस गुणिले असता, गुणाकार रुपये आण्यास गुणिले असता, आणे, खंडीस गुणिले असता, खंडी इत्यादी रुपयांस रुपयांनी अथवा खंडीस खंडीनी गुण ह्या णेहं केवळ अत्राव्य आहे, कारण गुणाकार ह्या णे गुणक वेळी गुण्य मांडून त्यांची बेरीज करणें ते ह्या रुपयावेळी रुपया अथवा खंडी वेळी खंडी ह्या णे अर्थ कोही नाही. व्यवहारांत रुपयांस रुपयांनी गुण असा ह्या ण्याचा सांमदाय आहे, त्या ठिकाणी रुपयांस अमुक अंकाने गुण असे ह्या णावे. गुणकावर पावले आण्याचा रेधा असतील, त्या रुपयाचे पावले आणे नव्हत. वेळी काचे पावले आणे आहे त-जसे रुपयाला अर्ध रुपयाने गुण ह्या णे ह्या णे रुपया हा अर्थ वेळी घेणें इ.
- #: यावजनांत सोळा शेंकड्या मण धरण्याची चाल आहे.

दि, यावरून जाजा जातीस गुणाबें त्या त्या जातीचा गुणाकार येतो.  
 (२) पावल्यास पावल्यांनीं गुणिलें असतां, आणे, आप्यास आप्यांनीं  
 गुणिलें असतां, पाऊणपें-पैशांस पैशांनीं गुणिलें असतां, पैशांचा १४  
 वाहिसा गुणाकार येतो. याची सत्यता अपूर्णकि शिकल्यावर लक्षांत  
 येईल.

**प्रथमप्रकार.** जेव्हां गुण्यावर रेघा असून गुणकावर नाहींत  
 तेव्हां.

### रीति.

गुण्य आणि गुणक मांडून गुण्यांतील अतिहलके किमतीचा रेघांस  
 गुणकानें गुणून त्या गुणाकारास जाजातिचा रेघांस गुणिलें  
 त्याचे वरचा भारी जातीचे एकांत यारेघा किती आहेत, त्याणीं भागावें;  
 भागाकार येईल, तो हातचा ठेवून, बाकी त्याखाली मांडावी; नंतर गुण  
 कानें त्याचे जबळचे भारी किमतीचा रेघांस गुणून, त्यांत तो हातचा  
 मिळवून, पुनः वरसांगितल्या प्रमाणें हातचा घेऊन बाकी मांडावी.  
 याममाणें शेवट पर्यंत रेघांचे गुणणें झाल्यावर, साध्या गुणाकारा  
 चे रीतीनें अंकास गुणून, त्यांत शेवटील हातचा असेल तो मिळवा  
 वा, अथवा अंकांनीं अंकास गुणून नंतर गुणकांकांनीं गुण्यांतील रे  
 घांस गुणण्या बद्दल गुणकांकांचा निम्पदीवरचा हलक्या जातीचा  
 रेघा पर्यंत काढून बेरीज घ्यावी.

### उदाहरणें.

$$\begin{array}{r} (१) \quad ३९५॥३॥ \text{ गुण्य.} \\ \quad \quad ९४ \text{ गुणक.} \\ \hline २९६७१॥२॥ \text{ गुणाकार.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (२) \quad १६०॥३॥ \text{ गुण्य.} \\ \quad \quad ७२ \text{ गुणक.} \\ \hline ११८०८ \end{array}$$



## उदाहरण.

रु० पा० आ० पै० अ०  
 ५०० ३०० १०० ३०० गुण्यः  
 ३०० २०० ३०० ३०० गुणकः  
 १५०० ९०० ६०० ९००  
 ११०० ६०० ४०० ६००  
 १५०० ९०० ६०० ९००  
 १००० ६०० ४०० ६००

रु० पा० आ० मे०  
 गुण्य. ५०० २०० २०० २००  
 गुणक. ३०० २०० २०० २००  
 १००० ६०० ४०० ६००  
 १५०० २०० ६०० २००  
 १००० ६०० ४०० ६००  
 १५०० २०० ६०० २००

५५-- ५९-- २७-- ३२-- १८-- १३-- ६  
२२-- ०-- ०-- १-- १-- २-- २  
रु० : पा०, जी०, प०, पै०, पावो०, इ०

१५-१८-२७-३१-१८-१३-६  
उत्तरे २२-०-०-१-१-२-२  
रु०-पा-आ-पै-पा-पै-पा-पा-पै-इ०

राति.

प्रथम कोष्ठकांत गुण्यांक पहिल्या आडव्या ओळींत पाहून, गुणकां कडावे कडील प्रथम उभे ओळींत पहावा; आणि त्याचे समोर गुण्यां का



चे खाली जे अंक असतील ते घ्यावे. हा गुण्य आणि गुणक यांतील पूर्णांकांचा गुणाकार झाला.

गुण्य आणि गुणक यांतरेचा असल्यास दुसरे कोष्ठकांत प्रथम ओळीत गुण्याचे पूर्णांक पाहून, गुणकांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळीत पाहावे; आणि त्या समोर पूर्णांकाचे खाली जे रूपये, आणे असतील ते घ्यावे. तसें गुणकांतील पूर्णांक वरील प्रथम ओळीत पाहून, गुण्यांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळीत पाहावे; आणि त्या समोर त्या पूर्णांका खाली जे रूपये, आणे असतील ते घ्यावे आणि त्या दोहोंची बेरीज करावी. ही बेरीज गुण्य आणि गुणक यांतील रेघांनीं परस्परांस गुणिलेला गुणाकार आहे.

तिसरे कोष्ठकांत गुण्यांतील रेघांक प्रथम वरचे आडवे ओळीत पाहून गुणकांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळीत पाहावे; आणि त्याचे समोर आणे, पै असतील त्या घ्याव्या, नंतर या तीन कोष्ठकांतील घे तलेले गुणका रांची बेरीज घ्यावी. ह्याने इच्छिलेला गुणाकार झाला.

चवथे कोष्ठकांत एक आण्या पासून चौवीस रूपये पंधरा आणे पर्यंत संख्यांचे वर्ग आहेत. ते घेण्याची रीति:- अंकावर जा रेघा असतील त्याचे अंक वरील प्रथम ओळीत पाहून आणि रेघांचे मागील अंक दुसरे उभे ओळीत पाहून त्या समोर रेघांका खाली जे रूपये, आणे आहेत, ते घेऊन त्यांत त्या अंकाचा वर्ग प्रथम उभे ओळीत त्या त्या अंका समोर आहे तो घेऊन मिलावावा. ह्याने इच्छिलेला वर्ग झाला.

### उदाहरणे.

(१) १७॥ = हे गुण्य यांस १२॥ = या गुणकानें गुण.

+ कोणत्याही संख्येस त्याच संख्येने गुणिलें असता त्या गुणाकारास वर्ग ह्याने.

१७ आणि १४ यांचा गुण० म० कोष्ठका पासून .. २२८

१७ आणि -१= यांचा गु० दुसरे कोष्ठका पासून .. ४२

१४ आणि -११= यांचा गु० दुसरे कोष्ठका पासून .. ४१=

-११= आणि -१= यांचा गु० तिसरे कोष्ठका पासून. -१८१॥

(२) २०॥३= यांस २०॥३= यांणीं गुण. ४२७१॥ हे उत्तर.

चवथ्या कोष्ठका पासून.

$$\begin{cases} ४०० \\ २७११॥३॥ \\ ४२७१॥३॥ \end{cases}$$

(३) ४५३८॥३= हे गुण्य यांस ४५॥३, ३८५३॥३, ७६११॥३ या गुणकांनी गुण.

(४) ७८६५४॥३= हे गुण्य यांस ७८॥३, ६५॥३, ७४३॥३, ६१८॥३, ६८७१॥३ या गुणकांनी गुण.

(५) ९८७६५४३॥३= हे गुण्य यांस ९८॥३, ८७६५३॥३, ८९७९८१॥३, ५००३००॥३ यांणीं गुण.

(६) कोणीं एकामनुष्याचे कुटुंबास ५८ मनुष्ये ४६ गाई त्यांत दर मनुष्यास दररोज ८३ व प्रति गाईस दररोज ८३२ तेन्ना त्यास एकंदर ए कवषसि सर्व किती लागेल.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

[illegible]



कोष्ठकतिसराः

[illegible]

[illegible]



## रेधांचा भागाकार.

साध्या भागाकारा प्रमाणें चिन्हें करून भाज्य भाजक मांडावे आणि भाज्यांतून भाजक किती वेळां जातो तो उजवीकडे साध्या भागाकारा प्रमाणें चिन्ह करून त्यांत मांडावा. या वेळां कानें रेधां सध्यां भाजकास गुणून, तो गुणाकार भाज्याखाली मांडून, त्यांतून वजा करून जी बाकी राहिल, तिची रेधा सहा दसपट करावी. व भाज्यांतील जो अंक वर ध्यावयाचा तो शेंवटच्या अंकांत मिळवावा; नंतर त्यास पुनः भाजकानें भागितां जो वेळां क येईल तो पूर्व भागाकारा उजवेकडे मांडून, त्यानें रेधां सहा भाजकास गुणून तो गुणाकार दसपट करून वर अंक मिळविले त्या रकमेंतून वजा करावा. आणि बाकीची दसपट करून पुनः वरचा अंक शेंवटच्या अंकांत मिळवावा. या प्रमाणें कृति भाज्यांतील सर्व अंक संपत तों करावी. शेंवटील मात्र अंक दसपटीस मिळविते वेळेस रेधां सध्यां मिळवून भाजकानें भागून जी बाकी राहिल तीतून भाजकाची पाऊणपट, अर्धपट, पावपट इत्यादि जो अंश वसेल तो भागाकारावर मांडावा. अशी कृति पाव आण्यापर्यंत करावी. इच्छा असल्यास पाव आण्याच्या निम्पटीच्या तिसरा हिस्सा अथवा दोन तिसरे हिस्से घेऊन पैचा भाग लावावा. ह्मणजे उजवीकडील रकम भागाकार होईल.

+ बाकीची दसपट करण्याचे कारण जास्थानची बाकी राहिली, त्या जास्थानचे एकांत त्याचे खालचे अंक दाहा आहेत, ह्मणून दाहानीं गुणून त्या गुणाकारांत त्याचे जातीचे अंक असतील ते मिळवावे. साध्या भागाकारांत बाकीवर अंक घेणें आणि रेधांचे भागाकारांत बाकीस दाहानीं गुणून त्यांत अंक मिळविणें हीं दोन्ही एकच आहेत, एवढा मात्र फेरकीं, रेधांचे भागाकारांत बाकीवर त्या त्या जास्थानच्या रेधा असतात याज करितां त्याची दसपट केल्या विना वर अंक घेतां येत नाही.

**टीप.** भाजकानें भागितां, केव्हां केव्हां भागाकार दशकावर ही लाग  
तो, तेव्हां दशक मागील अंकांत मिळविला पाहिजे हें लक्षांत ठेवावें.

### उदाहरणें.

(१) ८३८९५३। हे भाज्य १३५। = या भाजकानें भाग.

१३५। = ८३८९५३। (६१३। = ८९

अथवा.

भाजकाचा निशपदी	८९५। =
अर्धे ६७।। आ.	१८ = बाकी
पावले ३३।। आ.	१८७।। द.प.क.अं.मि.
चवळ १५।। आ.११	१३५। =
आण ८।। आ.३	४८।। - बाकी
अर्धआ. ४८३।। आ. =	४८३।। ना. द.क.अं.मि.
पा.आ. २६।। आ. =	४०७।। -
पै.अथ. ३.१।। आ.	८६।। बा. बाकी
	६७।। आ.
	१७।। -
	१५।। आ.११।।
	१।। - ८१।।
	१।। आ.
	८१।। १।। बाकी.

१३५। = ८३८९५३।

८९३ भागा.

८६।। ना. बा.

१६

१३७५। आ.

१३५। =

१३८ =

१३

१३७।। पै

१३५। =

पै.अं. २९।। =

उत्तर. ६१३। = १

(२) २८६। = हे भाज्य १।१। या भाजकानें भाग.

उत्तर ४३३।। =

### वैराशिक.

### प्रथम प्रकार.

वैराशिक ह्मणजे दोन कल्पित् प्रमाणपदांच्या आधारानें तिसरे पद

ची किंमत काढणे. त्या दोन कल्पित पदांचे गुणोत्तर, तिसरे पद आणि येणारे चवथे पद यांचे गुणोत्तरा बराबर असावे. यांत आदि, मध्य आणि अंत अशीं तीन स्थाने आहेत.

### रीति.

तीन पदां मध्ये जाची जात इच्छिलेल्या उत्तराची सारखी आहे, तें तिसरे स्थानी मांडावे; आणि असा विचार करावा की, घेतल्या दोन प्रमाण पदांच्या आधारानें इच्छित उत्तर तिसरे स्थानाचे पदापेक्षां लहान होईल किंवा मोठे होईल? जर मोठे होईल अशी कल्पना झाली, तर त्या दोन राहिल्या पदां मध्ये जे मोठे असेल, तें दुसरे स्थानी मांडावे; आणि लहान प्रथम स्थानी मांडावे; परंतु जर इच्छित उत्तराची सख्या तिसरे पदापेक्षा लहान होईल, तर विपरीत स्थणजे लहान पद दुसरे स्थानी आणि मोठे पद प्रथम स्थानी मांडावे; त्यांत प्रथम आणि दुसरे स्थाना मध्ये: असें चिन्ह करून दुसरे आणि तिसरे या मध्ये :: असें चिन्ह करावे. नंतर तिसरे स्थानांतील पदाला दुसऱ्या स्थानांतील पदानें गुणून, त्या गुणाकाराला प्रथम स्थानांतील पदानें भागावे. जो भागाकार येईल तें उत्तर; तिसरे पदाची किंमत. हें उत्तर तिसरे स्थानासुद्धें: असें चिन्ह करून मांडावे.

किंवा बरसांगितल्या प्रमाणें पदें मांडिल्यावर प्रथम व दुसरे स्थानांतील पदांचे गुणोत्तरानें स्थणजे भागाकारानें तिसरे स्थानांतील पदास गुणावे; गुणाकार येईल तें चवथें पद, इच्छाफल (उत्तर)

\* गुणोत्तर स्थणजे दोन संख्यांचा भागाकार, परंतु येथें दुसरे संख्येला मध्य संख्येनें भागिलेला भागाकार घ्यावयाचा; विपरीत घ्यावयाचा नाही.

तिसरे स्थानांतील पदांचे जातीचे येईल.

या रीतीत हा एक मोठा विचार आहे की, उत्तर, प्रमाण पदांचे कि मती पेक्षा जास्ती येईल. किंवा कमी येईल या विचाराकडे शिकणारांनी पुर्तलक्ष दिले ह्मणजे त्रैराशिक करण्यास कोणतीही अडचण पडणार नाही.

जेव्हा पहिले व दुसरे स्थानांतील अंक विविध जातीचे (कांही भावी व कांही हलके) असतील तेव्हा उत्तर ते भाजणीचे रीतीने त्या दोन स्थानांत जो अतिहलके जातीचा अंक असेल, त्या जातीत दोन्ही स्थानांचे अंक आणून वर सांगितल्या प्रमाणे कृतिकरावी.

जर तिसरे स्थानांतील ही अंक विविध जातीचे असतील तर उत्तर ते भाजणीचे रीतीने तेही हलके जातीत आणून, वर सांगितल्या प्रमाणे कृति करून उत्तर आणावे. जे इच्छा फळ येईल ते त्याच हलके जातीचे होईल. नंतर त्यास चढते भाजणीचे रीतीने भारी अंकाचे रूप द्यावे.

अथवा, विविध गुणाकार व भागाकार रीती प्रमाणे या तिसरे स्थानांतील पदास दुसरे स्थानांतील अंकाने गुणून, त्या गुणाकारास प्रथम स्थानांतील अंकाने भागावे, जो भागाकार येईल, ते उत्तर.

अथवा, प्रथम आणि दुसरे स्थानांतील अंकांचा गुणोत्तराने विविध गुणाकार रीती प्रमाणे या तिसरे स्थानांतील पदास गुणावे, ह्मणजे इच्छा फळ उत्पन्न होईल.

### दुसरा प्रकार.

+ मला असे वाटते की, विजातीय पदांचा गुणाकार व भागाकार होणे हे.



त्रिराशि गणित हाणजे तीन स्थानी तीन अंक राशि मांडून त्या पासून चवथा अंक उत्पन्न करण्याची रीति आहे, यास्तव तिचे नाव त्रिराशि अथवा त्रिममाण हाणाचें ही रीति फार उपयोगाची आहे, याजक रितां हिला स्ववर्ण रीती हाणतात.

या रीतींत आदि, मध्य, अंत, हीं तीन स्थाने आहेत, त्या तीन स्थानी तीन अंक लिहावे त्यांत प्रमाण आणि इच्छा हे दोन अंक समान जाति आणि तिसरा अन्य जाति असतो. प्रमाणांक आदि स्थानी लिहावा, इच्छांक अंत स्थानी लिहावा आणि अन्य जाति अंक मध्य स्थानी लिहावा. या तीन अंका पासून गणित रीतीने चवथा अंक उत्पन्न होतो, त्याचें नाव इच्छा फळ हा इच्छा फळांक मध्यांकाची समान जाति असतो. या रीतींत दोन भेद आहेत, सम त्रिराशि आणि व्यस्त त्रिराशि.

जेव्हा इच्छांक प्रमाणांका पेक्षा अधिक आहे, आणि, इच्छा फळांक मध्यांका पेक्षा अधिक होण्यास योग्य आहे, अथवा इच्छांक प्रमाणांका पेक्षा उणा आहे, आणि इच्छा फळांक मध्यांका पेक्षा उणा होण्यास

अवश्यक होय. त्यांतून गुणाकारा विषयीं तर रेखांचे गुणाकार मकरणी ति पे मध्ये (पृष्ठ ४१) यांत लिहिलेंच आहे. आतां भागाकारा विषयीं लिहितों. भागाकार हाणजे वजाबाकी होय. तेव्हा एक जातीच्या रकमेंतून दुसरे जातीची रकम वजा करणे हाणजे अर्थांकां हीं नाही, जसे कांही खंडी आहेत त्यांतून कांही रुपये वजा कर हाणजे हे दोणे अवश्यक, तर त्या खंडींतून दुसऱ्या खंडी अथवा खंडीचे अंश वजा करणे व्यवहारास व गणितास उपलब्ध आहे. या करितां मी जो मकार मथम लिहिला आहे, त्यावर लिहिलेला अवश्यक भाव येत नाही हाणून नितकें त्या मकारास अनुसरवेल तितकें अनुसरावें. हे बरे, तथापि शास्त्रींतून जी गणिताची पुस्तके आहेत, त्यांतून जी रीति लिहिली आहे ती ही लिहून त्या दोहोंचा सारासार विचार करणे तो शिकविणांरं व रठेविला आहे.

योग्य आहे, तेव्हां समविराशि ह्मणावे.

जेव्हां इच्छांक प्रमाणांकापेक्षा अधिक आहे, आणि इच्छाफळांक मध्यांकापेक्षा उणा होण्यास योग्य आहे, किंवा इच्छांक प्रमाणांकापेक्षा उणा आहे, आणि इच्छाफळांक मध्यांकापेक्षा अधिक व्हावयास योग्य आहे, तेव्हां व्यस्त विराशि ह्मणावे.

### इच्छाफल उत्पन्न करण्याची रीति.

समविराशि आहे तेव्हां मध्यांक अंत्यांकानें गुणावा, तो गुणाकार आद्यंकांनं भागावा, जो भागाकार येईल, तो चवथा अंक ह्मणजे इच्छाफल उत्पन्न होईल.

व्यस्त विराशि आहे तेव्हां मध्यांक आद्यंकांनं गुणावा, तो गुणाकार अंत्यांकानें भागावा, जो भागाकार येईल, तो चवथा अंक इच्छाफल उत्पन्न होईल.

### उदाहरणे.

(१) १२ हात वस्त्रास १० रुपये ६ आणे ३ पै पडतात तर ४० हातांस काय पडेल?

आदि. मध्य. अंत. इच्छाफल

हात हात रु. आ. पै रु. आ. पै

१२ : ४० :: १०-६-३ :: ६१-४-१०

१६

१२४ आ.

१२

३५३१ पै

४०

१२ ) १४१२४०

१२ ) ११७७० पै (१०

१६ ) १०० आ (४

६१ रु५

अथवा.

आ.

म.

अ.

१२

४०

१०-६-३

४०

१२ ) ७२५-१०-०

६१-०-४-१०

रु. आ. पै

उत्तर ६१-४-१०



(२) १६ काठ्या रुंदीची पुष्कळ काठ्या लांब जमीन आहे, तीतून १ बिघा दुसऱ्यास देणेंतर किती काठ्या लांब द्यावी?

आदि. काणसभ्य अंत. इच्छाफळ

रुंदीका रुंदीका लांबीका लांबीकी.

१६ : २० :: २० : २५

मिनि कि १६ रुंदीका लांबीका

(३) कोणी मनुष्याने १० रुपये तोलाच्या ममाणें ५० रुपयांचें सोने खरेदी केलें आणि एक तोळा सोने ठेवून बाकी ५० रुपये नफा करून विकलें तेव्हां कोणत्यां दराजें विकलें?

रु. आ. पे.  
उत्तर २०० ८००

(४) दर रुपयास ७ पायली ममाणें कोही रुपयांचें धान्य विकत घेऊन ५ पायली ममाणें विकलें आणि पुनः पांच पायली ममाणें तितकेच रुपयांचें विकत घेऊन ते ७ पायली ममाणें विकलें त्याच्या पारांत २५ रुपये नफा झाला, तेव्हां पूर्वी किती रुपयांचें धान्य घेतलें होतें.

रु. आ.  
उत्तर २१८ १२

(५) कोणी मनुष्याने दर दोरास पांच पैसे ममाणें ५ मण गूळ खरेदी करून २० रुपये दिले, तेव्हां एक रुपयाचा भाव काय?

उत्तर ५० पैसे.

(६) १५० पृष्ठांचें एक पुस्तक बरील मळ पृष्ठां साध्या १ रुपया ४ आण्यास मिळतें आणि दुसरे १०० पृष्ठांचें एक पुस्तक त्याच भातीचें तसें मळ पृष्ठांचें १५ आण्यास मिळतें, तेव्हां त्या मळ पृष्ठांची किंमत काय?

य?

उत्तर ५ आणे.

(७) ४ वाजत्यानेतर अवर कोटा आणि मिथ्यूट कांदा हे एकावर एक, समोरासमोर, व दोहों कडे ३५ अंशांचा कोन करून असल्यास त्या त्या वेळी किती वाजले असावे?

उत्तर { भेट. .... अ. मि. से. ४ -- २३ -- ४९  $\frac{१}{११}$  पूर्व कोन ४ -- १५ -- २७  $\frac{३}{११}$  }  
 समोरास. .... ४ -- ५४ -- ३२  $\frac{१}{११}$  मागील कोन. ४ -- २८ -- १०  $\frac{११}{११}$

(८) कोणी मनुष्याने १ पैशास ३ प्रमाणे १५० आंबे खरेदी केले आणि १ पैशास ३ प्रमाणे कांही पैशांचे आंबे खरेदी केले. नंतर २ पैशांस ५ प्रमाणे सर्व आंबे विकले तेव्हां त्यास ८ पैसे नफा झाला तर त्या गेंदर पैशास ३ प्रमाणे किती पैशांचे आंबे खरेदी केले होते.

उत्तर ११५ पैसे.

(९) कोणी एकाने एक चाकर ठेविला. त्याचा वर्षाचा करार ३५ रुपये आणि एक पागोटें घ्यावे असा होता, पुढे त्याने १० महिने चाकरी करून २८ रुपये आणि एक पागोटें नेले तेव्हां पागोट्याची किंमत काय?

उत्तर ७ रुपये.

(१०) दर खंडीस १३ रुपये ६ आणे प्रमाणे १३५ रुपयांचे धान्य खरेदी केले, त्यांतून ३ खंडी ४ मण धान्य घर वैगमी करितां ठेवून बाकीचे खूळ खरेदीस विकले तर विक्रीचा दर काय होता?

उत्तर. ११. ९. ४  $\frac{५०}{१००}$  आ. पे.

(११) कोणी एक मनुष्य समुद्र स्नानास निघाला, तो दररोज सात कोस जाऊन ३ कोस वस्तीस परत येई असे त्या मनुष्याचे प्रसंग झाले ६५ कोसांवर समुद्र असला, तर त्याला कितवे दिवशी समुद्र

स्नान घडेल?

उत्तर १६ वे दिवशी.

(१३) अ मजूर कोही काम रतासांत करितो, तेच ब मजूर २ घटिकें त करितो, तेज्वांजर जला दररोजचे तीन आणे दिले, तर ब का किती चावे?

आ. ये.

उत्तर ७ ० ६

(१४) एक मनुष्य होडीत बसून चढते पाण्यांत एक अवरांत तीन मैल जातो आणि उतरते पाण्यांत १० मैल जातो याप्रमाणें तो कोणे एके स्थळाहून नदीतून वर जाऊन ९ अवरांत पुनः परत आला व त्या स्थळां त्याने ११ तास विभ्रांति घेतली होती, तेज्वां तो किती मैल वरून जाऊन आला?

मै. या. ५०

उत्तर १७ ० ५४ १ ६

(१४) अने १० विघे आणि बने २५ विघे इतक्या सारखे दरानें ज मिनी सरदे की कैल्यानंतर अने आपली जमीन विकली, त्यास ४५०० रुपये नफा झाला व बने दोन विघे घरी ठेवून त्याच दरानें आपली विकली, तो त्यास २२५ रुपये नफा झाला, परंतु बजर आपली सर्व जमीन विकता, तर त्यास १७५ रुपये नफा झाला असता यावरून दर विघ्यास सरदे की व विकरीचे किती रुपये असावे?

उत्तर ६० सरदे की व ७५ विकरी.

(१५) एका बंदरा वरून ३ खंडी धान्य २० मनुष्यांनी २ खेपांत आणून १२ आणे मजुरी घेतली तर त्याच बंदरावरून दुसरे वेळेस ११ खंडी धान्य ३५ मनुष्यांनी ५ खेपांत आणिले असता, त्यास किती मजुरी द्यावी?

उत्तर १० रुपये १२ आणे.

(१६) दरमनुष्यास दररोज २ वोर प्रमाणे ५ महिने पुरे इतके अन्न संग्रही आहे तेच ७ महिने पुरविणें तर दरमनुष्यास दररोज किती वोर स्वर्च करावें? उत्तर १ वोर १ १/२ पाव वोर.

(१७) दरमणी ५ रुपये ६ आणे प्रमाणे तुपाचा भाव असतां कोणी मनुष्य आपले कुटुंबास एक महिन्यास ३ मण १५ वोर तूप स्वर्च करितो, तर ७ रुपये ९ आणे दरमणी भाव असतां त्यानें किती तूप स्वर्च करावें? ह्या जे त्यास अधिक पैसे लागणार नाही?

उत्तर २ मण १५ ११५/१०० वोर तूप.

(१८) पृथ्वी आपल्या आसा भोंवती एक अहो सत्रांत एक वेळ फिरत्ये, तर मध्यरेषेवरील राहाणारास एक तासांत तिचे बरोबर किती मैल जावें लागेल? पृथ्वीचा परीघ २५००० मैल आहे.

उत्तर १०४१ ३/४ मैल.

(१९) एकामनुष्याचे कुटुंबास एक महिन्यास सोळुळें मापाने ४ मण १२ पायली तांदूळ लागतात, तर बारुळे मापाने किती लागतील?

म. पा.  
उत्तर ६ १००/१००

(२०) एका तळ्यांत कांहीं कमळें होती त्यावर भ्रमरांचा समुदाय येऊन बसला. प्रत्येकावर दोन दोन बसले, तेव्हां पांच भ्रमर शिलक राहिले, ह्यापून तीन तीन बसले तेव्हां ४ कमळें शिलक राहिली. याच रून भ्रमर व कमळें किती किती होती.

भ्र. क.

उत्तर ३९-१५

(२१) कोणी मनुष्य एका देवळाचे समोरचे दरवाजा पासून त्या देवळास प्रदक्षिणा करूं लागला तर त्याचे प्रदक्षिणेत तो दरवाजास



मोर किती वेळ येईल.

(२२१) साडे तिहोरी सापाचे कांही मण आहेत. तर त्याचे सवा तिहोरी कसे करावे? व सवा तिहोरी असल्यास साडे तिहोरी कसे करावे?

(२२२) कांही धान्य किण्वीने ७ पैशास रपायली मिळते व तेच धान्य एक रुपयाचे १६ पायली मिळते; तर असें होण्याचें कारण काय?

(२२३) एका झाडाची उंची काढायची आहे. ती यंत्रा वांचून कशी काढावी?

(२२४) ६६ दिवसांत कोणी एकवार अधिक असा किती वेळां येईल.

## समस्तराशिक.

समस्तराशिक हाणजे जास पंचराशिक सतराशिक इत्यादि सणतात.

### रीति.

जे पद इच्छित उत्तराशीं सजातीय असेल, ते तिसरे स्थानी ३ :: असा कौंस व चिन्ह करून, त्या पुढें मांडावें, नंतर त्यांतून सजातीय दोन पदे व हें तिसरें पद मिळून त्रिराशि मनांत आणून असा विचार कराना कीं, या तिसरे पदापेक्षां उत्तर अधिक येईल, किंवा उणे येईल जर अधिक येईल, असें असेल, तर या सजातीय दोन पदांतून मोठें पद मध्ये मांडावें आणि कमी येईल असें असेल तर लहान पद मध्ये मांडावें; आणि या दोन पदांमध्ये: असें चिन्ह करावें या ममाणें सर्व सजातीय दोन दोन पदे घेऊन त्यांचा तिसरे सामान्य पदाशीं विचार करून उणे अधिक ममाणानें सर्व पदे मांडावीं. नंतर दु



सरे स्थानांतील सर्व पदांचा गुणाकार करून, त्यास तिसरे स्थानांतील सामान्य पदानें गुणून, त्या गुणाकारास प्रथम स्थानांतील सर्व पदांचे गुणाकारानें भागावें भागाकार येईल तें उत्तर.

टीप. जर पहिले बहुसंख्ये स्थानांतील अंकसमान असतील, तर गुणाकार करते वेळीं ते रद्द करून गुणाकार करावा. कदाचित् मध्ये कस जातीय पदांत कांहीं भारी व कांहीं हलके अंक असतील, तर ते राशिकाचे रीतींत लिहिल्या प्रमाणें त्यास एक जातीय करून वर लिहिल्या प्रमाणें करावें.

### उदाहरणें.

(१) १२० मनुष्यों २० दिवसांत १०० हात काम करतात तर १६० हात काम ४० मनुष्यों किती दिवसांत करतील?

मनुष्ये. ४० : १२० } :: २० दिवस  
 हात १०० : १६० } सामान्य पद  
 ४०००. १२२००  
 २०  
 ४०००) ३८४०००  
 ९६ दिवस.

अथवा

म. ४० : १२० } १२० दि.

हा. १०० : १६० }

$\frac{१२० \times १६० \times २०}{१०० \times १००} = १६ दिवस$

१ १

उत्तर १६ दिवस

(२) कांही एक काम ३२ मनुष्ये ९ अवराचे २५ दिवसांत करितान  
तर तेच काम २५ मनुष्ये १० अवराचे दिवसांममाणे किती दिवसां  
त करतील.

(३) २८ गार्ड्स - आठ बड्योंस १ खंडी १५ मण दाणा लागतो, तर  
३९ गार्ड्स २५ आठ बड्योंस दाणा किती लागेल. सं. स. मा.

उत्तर. ११-१४

(४) जेव्हां मातः काळी ७ वाजतां सूर्योदय होतो तेव्हां ८ मनुष्ये २० दिवसांत ३२० यार्ड काम करितात. तर ५ वाजतां सूर्योदय जाहल्यास १५ मनुष्ये २५ दिवसांत किती यार्ड काम करतील? उत्तर. १००० यार्ड.  
 (५) १५ मनुष्ये ११ अवरांवा २५ दिवसांत ५२० यार्ड लांब २ हात रुंद १५ फुट उंच अशी भिंत बांधितात तर ११ मनुष्ये ८ अवरांवा ४१ दिवसांत १६५० यार्ड लांब ६ हात रुंदी अशी भिंत किती फुट उंच बांधीतील?

### वरावर्दीगणित.

वरावर्दीगणित (संक्षेपचैराशि अथवा मराठी हिशोब)  
 व्यवहारी हिशोब तोंडाने करितां यावे; म्हणून याचा अर्थ संग्रह केला आहे.

व्याख्या. कोणतेही वस्तूचे दराला त्या वस्तूचे भारी किंवा कमी जातीचे संख्येने गुणिलें असतां, त्या गुणाकाराला कथ्ये म्हणावे.

### धान्यकैली सोडुलें माप.

रीति.

उदाहरणें कबतरें.

(१) खंडीवरून मणानी किंमत  
 खंडीचे दरास मणानी गुणावे  
 गुणाकार येईल ते कथ्ये २० क  
 चांस रुपया, ११ कच्चा ० आणा, दर  
 कच्चा ० २० रेंस, अथवा २५ दाम, क  
 चाचे आण्यास ११ रेंस अथवा ११ दाम

खंडीस रुपये ३५॥, ५१ मणानी किंमत.

तपशील

३५॥  
 ५१

२० ६१ कथ्ये  
 रुपये ३५॥ देउत्तर.

- (१०) खंडीवरून पायलीस २० क० आ० खंडीसरुपये २३॥१॥ या पायलीची किं०  
णा, दरक० १ रिंस अ० १॥ दाम. } क० ६३॥१॥ उत्तर ६३॥१॥
- (११) खंडीवरून शोरास ८० क० आ० खंडीसरुपये १३॥१॥ = ४ शोरा० किं०  
दरक० ३ विस्वे. } क० ३०॥३॥ उत्तर ११॥२॥ वि०
- (१२) खंडीवरून शिरद्यास दरक० ३० खंडीसरु २३॥१॥ = १॥३॥ किं०  
स० ॥३॥ विस्वा. } क० ३०॥१॥ उत्तर ६३॥१॥
- (१३) मणावरून पायलीस १६ क० मणासरु १॥१॥ या पायलीची किंमत  
दरक० आणा क० ३० आण्यास ॥३॥ पै. } क० ३६॥१॥ उत्तर ६३॥१॥
- (१४) मणावरून शोरास ६४ क० मणासरु १॥१॥ = १॥३॥ शोरा० किंमत  
दरक० पाव आणा. } क० ४॥३॥ उत्तर ११॥२॥
- (१५) मणावरून शिरद्यास ४ क० मणासरु १६॥१॥ = ३ शिरद्या० किंमत  
व आणा, दरक० ॥३॥ पै. } क० ३॥१॥ उत्तर ६६॥१॥

### बारुके माप.

- (१६) खंडीवरून पायलीस १५ क० खंडीसरु २३॥१॥ = ४ पायली० किं०  
आणा, दरक० २ दाम, १ क० पै. } क० ६३॥१॥ उत्तर ६३॥१॥
- (१७) खंडीवरून शोरास ६० क० आ० खंडीसरु २३॥१॥ = १॥३॥ शोरा० किं०  
णा, दरक० ४ विस्वे. } क० ३०॥३॥ उत्तर ११॥२॥
- (१८) खंडीवरून शिरद्यास २० क० खंडीसरु २३॥१॥ = १॥३॥ शिर० किं०  
दरक० १ विस्वा. } क० ३०॥१॥ उत्तर ६३॥१॥
- (१९) मणावरून पायलीस १२ क० मणासरु १॥१॥ = ४ पायलीची किं०  
रु०, दरक० १६ पै० क० आ० १ पै. } क० १॥३॥ उत्तर १२॥३॥
- (२०) मणावरून शोरास ३ क० आ० मणासरु १॥३॥ = १ शोरा० किं०  
णा ६ क० ४ पै. } क० १॥३॥ उत्तर ११॥२॥

(१३) मणावरून शिरद्यास १२क० मणासरु० १६था, २ शिरद्या० किं  
आणा, दरक० १पै. } क० २३ उत्तर ६६था.

### वजनी.

(१४) खंडीवरून मणास २०क० खंडीसरु० ३था, २ मणाची किं  
रु० ११क० आणा १क० २०रें. अ } क० २८६था उत्तर ६६था = ६६  
२४दाम.

(१५) अट्कीवरून मणास } अट्कीसरु० २था, २ मणाची किं  
८क० रु०, दरक० ३आणे कच्चा. } क० ६६६था उत्तर ८१था.  
आण्यास १॥पै

(१६) खंडीवरून धड्यास ५क० खंडीसरु० २०॥, २ धड्यांची किं  
आणा, दरक० ५रेंस. } क० ४१॥ उत्तर १॥५॥

(१७) अट्कीवरून धड्यास } अट्कीसरु० १८॥, २ धड्यांची किं  
३२क० रु०, दरक० अर्धआणा. } क० २५॥ उत्तर १॥६१॥

(१८) खंडीवरून शोरास ५०क० खंडीसरु० ८०॥, ५ शोरांची किंमत  
आणा, दरक० १॥रेंस. } क० ४०३६ उत्तर १॥१॥

(१९) अट्कीवरून शोरास ३०क० अट्कीसरु० ७०था, ३ शोरांची किंमत  
आणा, दरक० १॥रेंस. } क० २२था उत्तर १॥३१

(२०) मणावरून धड्यास } मणासरु० २०॥, १ धड्यांची किंमत  
४क० रु०, दरक० ४आणे. } क० २०॥ उत्तर ६६था.

(२१) मणावरून शोरास ४०क० मणासरु० ३०॥, २ शोरांची किंमत  
रुपया, ४क० आणा, दरक० } क० १२था उत्तर १॥७१  
१०रेंस.







(२१) वर्षाबरून दिवसास } वर्षासरु०४००, २दिवसांचीतैनांत.  
 २भा क०आ०॥॥ क०१दाम. } क०६०० उत्तर २८-३५

(२२) तिशीमहिन्याबरूदि ) महिन्यास२५रु०, ३दिवसांचीतैनांत.  
 वसास. कत्राचानिमेआणे } क०७५ उत्तरथा.

बक०इत्तेकेदाम.

## बिद्यावणी.

(३२) विद्यावरून पांडासव } विद्यास. ११२, या पांडाची किंमत  
पांडावरून काठीस. २० क० } क० ३६५५॥ उत्तर १॥१॥१॥  
रु. ११ क० १ आणा, क० २० रेंसअ }  
२४ दाम.

(३४) विद्यावरून काठीस } विद्यास २५। रु०, ३ काठ्यांची किं०  
४०० क० रु०, २५ क० आणा, दर } क० ८५। उत्तर २५। २५ =  
कच्चास १२०० रु० }  
कच्चास १२०० रु० }

## शेंकडावण

(१५) हजार वरून कोणत्याही संख्येस ६५५ आणा. याक० १२५५० उत्तर २५५०

(३६) शेंकड्यावरून कोणत्याही संख्येस १०० क० रुपया, धक० वगळा. उत्तर = ॥११९

व्याज.

नैमले मुदलावर नैमले मुदतीस जो नफा वेणें त्यास व्याज म्हणावें.

दरसाल दरवोंकडा रूपये १२, ९, ६, ३, १०, २४ व्याजाचा दर असला ह्याण  
जे त्यास एकोत्रा, पाऊणोत्रा, अर्धोत्रा, पावोत्रा, दिदोत्रा, दुदोत्रा इत्यादि  
ह्याणण्याची चाल आहे.

(३०) वर्षावरून महिन्याचे व्याज सुदलरु० ३२५ = यांचे अडिचम  
करणंतर सुदलास महिन्यानीं गु हिन्याचे व्याज किती?  
णावे. एकोत्रा दर असल्यास १०० क० क० ८१॥ ३॥  
रु० ५० क० आणा, दर क० ४८ रेंस पावो  
णोत्रा १०० क० आणा १२ आणे, दर क० ३०  
रेंस, अर्धोत्रा दर क० २८ रेंस, पावोत्रा,  
१ रेंस, दिदोत्रा दर क० २६ रेंस इत्यादि.

(३८) कोणताही व्याजाचा दर अस- २०॥ = सुदल ४॥ महिन्याचे  
ल्यास- एकोत्रा प्रमाणे सांगितले व्याज दरसाल दरवोंकडा रूपये  
सुदलाचे व्याज करावे, आणि सां- प्रमाणे क० १२०॥ १॥  
गितले दराला बारांनी भागून, त्या एकोत्रा प्रमा० आ० १६॥ २॥  
भागाकाराने पूर्व व्याजा सरुणावे. १२) ७॥ ३॥

रुपये हे उत्तर १॥ १०॥

(३९) वर्षावरून दिवसास सुदला १६०॥ १॥ सुदल ५ दिवसांचे  
स दिवसांनी गुणावे गुणाकारा व्याज एकोत्रा प्रमाणे क० ८९॥ १॥  
स ३० नीं भागावे येतील ते प के पळे क० २०॥ ६९  
कचे नंतर वर्षावरून महि० सा उत्तर १॥ १॥  
गि० प्रमा० करावे.

## उलटरीतीने.

- (१) पायली वरून खंडीस (सो०) } ३ पायलीस १११, खंडीची किं०  
पायलीचा आप्यास २० नींगुणू क० ११० (सो० मा०) १५५५५५  
न त्यागुणाकारास पायल्यांनी  
भागावे. भागाकार येईल ते खंडू  
(बारोळी) आप्यास १५ नींगुणू क० ८५५  
पायल्यांनी भागावे. भागाकार ये (बा० मा०) रु० २५५५  
ईल ते खंडू.
- (२) शिरद्या वरून खंडीस (सो०) } ३ शिरद्यास ११२ खंडीची किं०  
शिरद्याचा विख्याला चोहोंनीगु क० ११५५ ११ (सो० मा०) ५५५ ३०५  
णून ३ भागावे. भागाकारास  
शिरद्यांनी भागावे. येतील ते रु  
पये. (बारोळी) शिरद्याचा वि क० १००  
ख्याला शिरद्यांनी भागून येती (बा० मा०) रु० ११५५ १५  
ल ते रुपये.

## वजनी.

- (१) गुंजा वरून तोळ्यास गुंजा } १५ गुंजेस १५५ आपणे, तोळ्याची  
चे आप्यास ६ नींगुणू गुंजांनी किंमत काय?  
भागावे. येतील ते रुपये अ० गुंजा क० १५५५ उत्तर, १३ रु०  
चा पेची निपट करून त्यास गुंजा  
नी भागावे. भागाकार येईल ते रु

- (४) शीरांवरून खंडीस. शीरांवे  
 आण्यास ५० चांणी गुणावे आणि  
 शीरांवे संख्येने भागावे भागाकार  
 येईल ते रूपये. अ० शीरांवे रेसां  
 ची निपट करून, शीरांनी भागावे  
 भागाकार येईल ते रूपय  
 (५) काठ्यांवरून विध्यास. का-  
 ठ्यांचा आण्यास २५ सानी गुणा  
 वें आणि त्या गुणा कारास काठ्यां  
 ची भागावे भागाकार येईल ते  
 रूपये.
- ५ शीरांस ४ आणे, खंडीची किंम  
 त काय?  
 क० १०० उत्तर ४० रूपये.  
 ७ काठ्यांस ३ आणे तर विध्या  
 ची किंमत काय?  
 क० ६३ आ. उत्तर १११ आ०.

या प्रमाणें जितक्या सुलट चाली आहेत, तितक्या त्यांचे उलट  
 समजाव्या.

### व्याज.

व्याज हाणजे नेमले सुलटावर नेमले सुदतीस जो नफा घेणेतें.

व्याजाचे दोन मुख्य प्रकार आहेत, सरळ आणि चक्रवाद.

### सरळ व्याज.

सुलटास जितकी वर्षे झाली, असतील तितके वर्षांचे नेमले दरा  
 ने एकदम व्याज करणें, याचे हिशोब प्रैराशिक व पंचे राशिक यांचे  
 रीतीनें करावे.

सुदतीचे आंत कांहीं रकमा रिणकी कडून परत आल्या अस-



तील, तर एकंदर रकमेचे व्याज अखेर सुदती पर्यंत करून, त्यांत पा  
व व्याज रकमेचे व्याज अखेर सुदती पर्यंत जें होईल, तें वजा करावे.

### उदाहरणे.

(१) ४४५ रुपये ५ वर्षे ३ महिने दर साल दर शेंकडा ५ रुपये व्याजा  
चे दराने होते त्यांचें व्याज किती होईल?

महिने. १२ : ६३ } :: ५ रुपये.  
सुद्धल १०० : ४४५

$$\frac{445 \times 63 \times 12}{100 \times 360} = \frac{10569}{360} = 29.35 \text{ रु. आ. १३ व्याज}$$

(२) कोणी एकाने दर साल दर शेंकडा ५ रु. व्याजाचे दराने ४ महिने ७ दिव  
सांनी १३२ रुपये ६ आणे व्याज सुद्धल रास आणून दिली, तेव्हां सु  
द्धल किती होतें?

रु. आ. पे.

उत्तर १३० ... १ ... ३

(३) कोणी एकामनुष्याने एका सावकाराचे दर साल दर शेंकडा  
पांच रुपये व्याजाचे दराने सकाळीं कांहीं रुपये घेऊन, त्याच दिव  
शीं दोन महरी दर साल दर शेंकडा सात रुपये दराने पूर्वीचे दुप्प  
ठ रुपये घेतले; आणि आठ महिन्यांनीं दोन्ही रकमांची १३५ रुप  
ये रास आणून दिली, तेव्हां एकंदर सुद्धल किती? व प्रत्येक दराने  
वेगवेगळ्याने किती?

रु. आ. पे.

उत्तर { एकंदर सु. १३५ ... ५ ... ६  
५ चे दराने ४३ ... २ ... १०  
७ चे दराने ९२ ... ५ ... ८



व्यापारांत या सरळ व्याजाचे व्याज कढाव, आणि व्याज फैलाव, असे दोन भेद आहेत, त्यांचे करण्याची रीति, खाली अ आणि ब यांचे द्विबोब ककडून झालेले लिहिले आहे त्यांवरून कळेल.

द्विबोब (अ) गृहस्थाकडे (क) सावकाराचे रुपये येणें त्या बाबदइ सकविल कार्तिक शब्द १ शके १७७९

जमा ————— रुपये. खर्च ————— रुपये.

२८० पौष वद्य १ शके मजकूर गु.  
खुद्द रोख कंपनी.

२०० कार्तिक शब्द १ शके मजकूर  
रोख कंपनी.

४६० फाल्गुन शब्द ७ शके मजकूर  
गु. खुद्द रोख कंपनी.

२०३ चैत्र शब्द ८ शके १७८० गुजा  
रत खुद्द हुंडी मुंबईस (ड) सा

१९ आषाढ शब्द १३ शके १७८०

वकारावर घेतली त्या बाबद कं  
पनी रुपये.

गु. खुद्द हुंडी मुंबईचे सावका

रावरील रु० १०० ची विकत दि

२०० ऐन हुंडी मुंबईस पाठ-

ली त्याज बाबद दरसदे १९ प्रमा.

विली.

+ व्याज कढाव व व्याज फैलाव या शब्दांचा उपयोग. जेथें रकमा दोन चार वेळां नेल्या व परत केल्या असतील तेथें करितात. हाणजे पहिल्यानें एकरकम नेऊन, पुढें दोन चार महिन्यांनीं कांही रुपये परत केलें व बाकी राहिलेले पुढें कांहीं महि-  
न्यांनीं दिले याप्रमाणें; पहिल्यानें जी रकम नेली, तिचें त्या मिती पासून पहिल्या-  
नें जी रकम परत केली, त्या मिती पर्यंत व्याज करून मुदलांतून ती रकम ते व्याज  
वजा करून पुढें असेच करीत जाणें या रीतीस व्याज कढाव हाणतात. जी रकम  
पहिल्यानें नेली तिचें त्या मिती पासून जी रकम दोबटीं मुद्दल फेडण्यास दिली  
त्या मिती पर्यंत व्याज आकारून त्यांतून जारकमा परत केल्या, असें ती रु-  
त्यांचें त्या त्या मिती पासून दोबदचा मिती पर्यंत व्याज आकारून तें व्याज  
पूर्व व्याजांतून वजा देऊन, जी बाकी राहिल तें व्याज समजणें यास व्याज फैलाव  
हाणतात.

११० भाद्रपदशुद्ध १ शके मजकूरगु

सुद्ध रोख कंपनी.

१० सदरहू बाबद हुंडणा बळ

दरवां कडा १११ म०

६७॥ आ० अभिनवशुद्ध १ शके मजकूर

गु० सुद्ध रोख वगैरे कंपनी.

२०

२० ज्येष्ठ वद्य १ शके मजकूर गु० सुद्ध

२२ रोख

(व) कड येणें त्याचा हवाला घेत

४५॥ आ० सोन्याचें जोडवें कज

ला ते त्याचे जमा करून नावे रु० कंपनी

व तोळे २॥ १११ दर १५ म०

२६॥ आ० श्रावण शुद्ध ११ शके मजकूर गु०

६७॥ आ०

सुद्ध रोख वगैरे रु० कंपनी.

२२ अभिनवद्य २ शके मजकूर गु०

२२० रोख. १७॥ सोनें तोळा १

सुद्ध रोख कंपनी

२६॥

१००॥ आ०

२१॥ भाद्र० शुद्ध १२ गु० सु० चांदी व

बाकी येणे.

जनभार ५० एकूण दरभारा स

२०६॥ एन सुद्ध.

वर्तिला ना० प्रमाणे

१६॥ आ० व्याज.

१०००००००

३७६०

१६॥ आ० व्याज इस० मिति कार्तिक शु०

शके १७००१ तागा० अभिनवद्य २०

शके १७०० पर्यंत नावे कडील

कच्चे १२८१॥ पैकीं जमे कडील

कच्चे २८८० क० बा० १५८५॥

दरसदे एकीत्रा प्रमाणे आकार

रुजुवातीने ठरला ते कंपनी.

१०८८॥

आज आकार (अ) गृहस्थाचें (क) सावकाराकडे खातें चालल्या वा  
वद इस्तकविल कार्तिक श० १ श० १७७९

जमा. ————— रुपये. खर्च ————— रुपये.

- ० रकम रुपये २६० पोषवद्य १ १६७५ रकम २०० कार्तिक श० १  
२३था. र० रुपये ४६० फाल्गुन श० ७ ६२२ रकम २२० माहे २७१२  
० रकम २५० १०२० बाकी रु० २२० माहे ४६६  
२०था. र० रुपये २०३ माहे १७१ ३६७२  
२३ रकम ७ माहे ३६२ ० रकम २०३ चैत्र श० ८ शके १७८०  
३३था. ३८११ रकम २० ज्येष्ठवद्य १  
२४. र० १०९ आषाढ श० १३ श० १७८० ० रकम ७  
० रकम ४३ ३८११ बाकी ४३ माहे ८२७  
२४. बाकी रकम रुपये २६ माहे ८२२ ३८११  
२४. २०था. रकम २६७११ श्रावण श० ११  
० रकम ५६ ० रकम ५६  
१०० र० १२० माहे ८२०  
१०था. बाकी ६११ माहे १८२०  
२०था.  
६था. र० ७१११ माहे ० श० ११  
४ र० ६१११ माहे ७१२  
२४ र० २२ माहे १८२  
१२४ बाकी २० ८११ मागा इतअ  
खिन व० ३० श० १००८ माहे ११०  
६था.

बाकी येणें कबो.

१६०६११.

॥ एकोना प्रमाणे आकार

१८८१॥१॥

१॥१॥१॥

तेरीज

२०८॥ बाकी येणे ऐन सुदल

१॥१॥१॥ व्याज इस्तकविल मितिकार्तिक शक ११०८९ तागाइत  
अधिनवद्य १० वाके १०८० पर्यंत एकंदर स्वास्थाचे जावे कडी  
ल कचे १८८१ ॥१॥ पैकीं जमे कडील कचे २८८८ बाजा करून बाकी  
येणे कचे १८८९ ॥१॥ एकुण दर सदे एकोना प्रमाणे आकार

३७८८

हि शीव (ब) गृहस्थाकडे (क) सावकाराचे रुपये येणे त्या बाबद इ  
स्तकविल कार्तिक शक ११०८९

जमा रुपये स्वर्च रुपये

२० मार्गशिर्षवद्य १ वाके मजकूर २०० कार्तिक शक ११०८९ सुख

गु सुद रोख कंपनी

रोख कंपनी या शी व्याज दरम

७२ पौष शक ११ वाके मजकूर गु सु

हा दर सदे एकोना प्रमाणे करार

द रोख कंपनी

आज अधिन शक ११०८९ गु

२८ माघ वद्य १ वाके मजकूर गु

सुद व्याजर २०८०० बाबद इ

(ब) यापें तुहांपैकीं (न) याजव

स्तकविल मितिकार्तिक शक ११०८९

रोवर पाठविले ते रोख कंपनी

तागाइत आज पर्यंत रुजवाती

बदल पावती दिली असे

नें ठरले ते

३२ फाल्गुन शक ११ वाके मजकूर गु

७२२०८० माहे १८८२

(ख) रोख कंपनी

१८०२०७८ माहे २

६८ चैत्रवद्य १३०० गु० सु० रो० संक० ८७॥ र० २५ माहे १९१८

७० वैशाख १३०१ गु० सु० रो० कंपनी १४० र० ३८ माहे ४

८० ज्येष्ठवद्य १३०२ गु० सु० ह० बाला ना १८७॥ र० ६८ माहे ८७१८

वें (अ) रु० कंपनी ३०० र० ८० माहे ६

८८ श्रावणवद्य १३०३ गु० सु० रो० कंपनी १७८ र० ८० माहे ७७१८

१०॥ अश्विन १३०४ गु० सु० रो० कंपनी २३७॥ र० २८ माहे ८७१८

८८८॥

१४१८॥ बाकी १२८ माहे ११ ७१० वष

बाकी येणे रुपये

शीलदार

॥ ८८८॥

१११८॥

८८८॥ दर एकोत्रा प्रमाणे

८८८॥ ८८८॥

### चक्रवाटव्याज

चक्रवाट व्याज हाणजे मध्यम सुदतीस नेमले दरानें व्याज करून पुढें व्याज सहित सुदलाचे पुनः पुनः व्याज करितात ते.

रीति.

प्रथम एके सुदतीस नेमले दरानें व्याज करून, तें सुदलांत मिळवून पुढे सरे सुदतीस नेमले दरानें या व्याज सुदलाची व्याज करून, तें पारा शांत मिळवून, पुनः व्याज करावें या प्रमाणें दोबट सुदती पर्यंत करावें. दुसरी सांगितलेला व्याजाचा दर आपले सुदलाचा जितके वा हिस्सा भा सेंल, तितका हिस्सा सांगितले सुदलाचा त्यांत मिळवून, पुनः त्या राशीचा जितकाच हिस्सा त्यांत मिळवावा या प्रमाणें सुदती संख्या वेळां करावें.



## उदाहरणें.

(१) सुदल ७२० रु० यांस व्याज दर साल दर वों कडा ५ रु० ३ वर्षांची रास काय हो

सुदल रु०	सु रु०	व्या० रु०	व्या रु०
१००	७२०	५	३६
			७२० सु०
			७५६ रा०
१००	७५६	५	३७८.२७०
			७९३.८४०
१००	७९३.८४०	५	३९६.९१०
प्रथमरीतीने		रास उत्तर	८३३.९७०१॥

(२) दर साल दर वों कडा ४ रुपये  
व्याजाचे दराने ४३२ रुपये सुद  
लाची ३ वर्षांची रास किती होईल.  
आतां ४ रु० हे आपल्या सुदलाचा  
२५ वा हिस्सा आहेत, याजकस्ति

२५)	४३२
	१७६४६६
२५)	४४९८४६६
	१७८९८५१॥
२५)	४६७०६४१॥
	१८११११॥
राहेउ.	४८५१८६१

## चर्चाचीरीति.

समाकार मोत्यांचे कांही मान पहाण्याची एकरीति आहे, तीस च  
र्चाचीरीति ह्मणतात.

प्रथमरीति. रतीला रतींनीं गुणावे, त्या गुणाकाराला ५५ यांनीं गु  
णून, ९६ नीं भागावे, नंतर त्या भागाकाराला मोत्यांचे संख्येनें भागावे,  
जो भागाकार येईल तेच व होत.

दुसरीरीति. गुंजास गुंजांनीं गुणावे, त्या गुणाकाराला १५९ यांनीं गु  
णून ५१२ नीं भागावे, त्या भागाकाराला मोत्यांचे संख्येनें भागावे,  
जो भागाकार येईल तेच व होतील.

+ गुंजेची गा. रती धरितात आणि कित्येक ठिकाणी गुंजेची गा. रती धरितात  
यारीतीत १३ टां = १२० आणि २४ टां = १ टांक हा आधार असावा.

टीप. १ चवाचे १०० दोकडे आणि १ दोक० चे १०० प्रति दो० धरितात.

### उदाहरण.

(१) ७ मोत्यांची पुरवणी - गुंजा - (२) आठ मात्ये ६ गुंजा वजन आ  
वजन आहे, तिचे चव किती होतील? हेत, त्याचे चव किती होतील?

$$\begin{array}{r}
 \text{च. दो. प्र. दो.} \\
 \frac{111}{6} \quad (१) २० \cdot ६२ \cdot ५० \\
 \frac{6}{2 \cdot ९४ \cdot ६४} \text{ उत्तर.} \\
 \hline
 ३६ \\
 ५५ \\
 \hline
 १६०० (६० वा. \\
 \text{च. २०} \quad \frac{१००}{१६०} (४० \\
 \text{दो. ६२} \quad \frac{१००}{१६०} \\
 \text{प्र. दो. ५०} \quad \frac{१००}{१६०}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{च. दो. प्र. दो.} \\
 \frac{111}{6} \quad (१) ११ \cdot ६० \cdot १५ \frac{५}{८} \\
 \frac{6}{३६५} \quad \frac{५९२}{५९२} (३०० वा. \\
 \frac{११३५}{५९२} \quad \frac{१००}{३०००० (६० वा. \\
 \text{दो. ६०} \quad \frac{१००}{५९२} (३३० \\
 \text{प्र. दो. १५} \quad \frac{१००}{५९२}
 \end{array}$$

### सांकळरीति.

सांकळरीती हा एक त्रैराशिकाचाच भाग आहे, यांतील पदे परस्प  
र कोणत्याही प्रमाणाने येतात; व तीं सांकळीचा कड्या प्रमाणे जोड-  
लेलीं असतात, हणून यास सांकळरीति हणतात.

सांकळरीतीने उत्तर काढणे.

जा पदाची किंमत इच्छिती आहे त्या पदास इच्छितादक पद हणा  
वें आणि ते उजवे कडे एके ओळींत मांडावें, नंतर त्या पदाचे जातीचे  
पद असेल ते त्याचा खाली दुसरे ओळींत डावे कडे मांडून त्याचा  
शीर्जे दुसरे विजातीय पद किमतीचे बरोबर असेल ते उजवे कडे  
इच्छितादकाचे खाली मांडावें आणि त्यामध्ये  $\leq$  असे चिन्ह लिहावे  
नंतर या पदाचे जातीचे जें दुसरे पद असेल ते पूर्वी मांडलेल्या डावे

कडचा पदाखाली मांडून, त्याचाशी किमतीने बराबर असणारे भिन्नजातिपद पुढे मांडावे व या भिन्नजातिपदामध्ये वरसांगितल्याप्रमाणे चिन्ह लिहावे याप्रमाणे सर्वपदे मांडित्यावर उजवे कडचा सर्वपदांचा गुणाकार ठावे कडील सर्वपदांचा गुणाकारा नें भागावा; भागाकार येईल ते इच्छा फळ होईल, हे उजवे ओळीतील दोबडील पदाशी सजातीय असते.

### उदाहरणे.

(१) १ शेर साकर किमतीने २ शेर काकवी बराबर, १ शेर काकवी ४ शेर मधा बराबर, आणि ३ शेर मधाची किंमत ५ आणे, तर २० शेर साखरेची किंमत काय?

२० शेर इच्छो.  
सा. शो. १  $\begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix}$  २ शो. का.  
का. शो. १  $\begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix}$  ४ शो. म.  
म. शो. ३  $\begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix}$  ५ आ.  
$$\frac{20 \times 2 \times 4 \times 5}{3 \times 1 \times 3} = \frac{800}{9} = 88 \frac{8}{9}$$

आ. ये.  
१३-६ हे उत्तर.

(२) कुत्र्याची ५ पावले लांबीने सद्याची ७ पावलां बराबर सद्याची २४ पावले हत्तीचा ५ पावलां बराबर हत्तीचे १ पावलाची लांबी २० इंच आहे तर कुत्र्या २५०० पावले चालला असता लांबी किती होईल?

उत्तर

फ. या. रु. इ.  
२-१६७-११

### बद्धा

दोन जातीचे रुपयांत परस्पर बराबर होण्यास जो कमी रणा असतो त्यास बद्धा द्यावे जसे हुकेरी रुपयांस सक्तीशीं दर शेंकडा चार रुपये बद्ध्याचा भाव आहे द्यावे शेंकडा चार रुपयांनी हुकेरी सक्तीहून कमी आहेत.

अवहारांत बट्ट्याचे, आंत बट्टा आणि बाहेर बट्टा असे दोन प्रकार आ  
हेत.

### रीति.

**आंत बट्टा** - बट्ट्याचा दर शंभरांत वजा करून त्या प्रमाणें प्रमाणमां  
डावें; जसें १०० रु०, बट्टावावयांचे रुपयांस होतात; तसें १०० रु० उणा बट्ट्या  
चा दर, बट्टाविले रुपयांस होईल.

**वर बट्टा** - बट्ट्याचा दर शंभरांत मिळवून प्रमाण मांडावें. जसें १००  
रु० अधिक बट्ट्याचा दर, बट्टावावयांचे रुपयांस; तसे १०० रु०, बट्टाविले  
रुपयांस होतील.

**टीप.** सावकार लोक आंत बट्ट्यानें रुपये देतात, व वर बट्ट्यानें घे  
तात, त्यांत फरक इतकाच की, बट्ट्याचे रुपयांचा बट्टा मिळते.

### उदाहरणे.

हुकेरीचा सुर्तीशीं दर बोकडा ३३ रुपये बट्ट्याचा भाव असतां,  
११७ रुपये हुकेरीचे आंत बट्ट्यानें आणि वर बट्ट्यानें सुर्ती कीती रु  
पये होतील?

आंत बट्ट्यानें

रु० रु० रु०

१०० : ११७ :: २५।

२५।

१००) ११७२५। आ. पै.

रु० ११७ : ११८ : ११

उत्तरें

वर बट्ट्यानें.

रु० रु० रु०

१०३। : ११७ :: १००

१००

१०३।) ११७०० आ. पै.

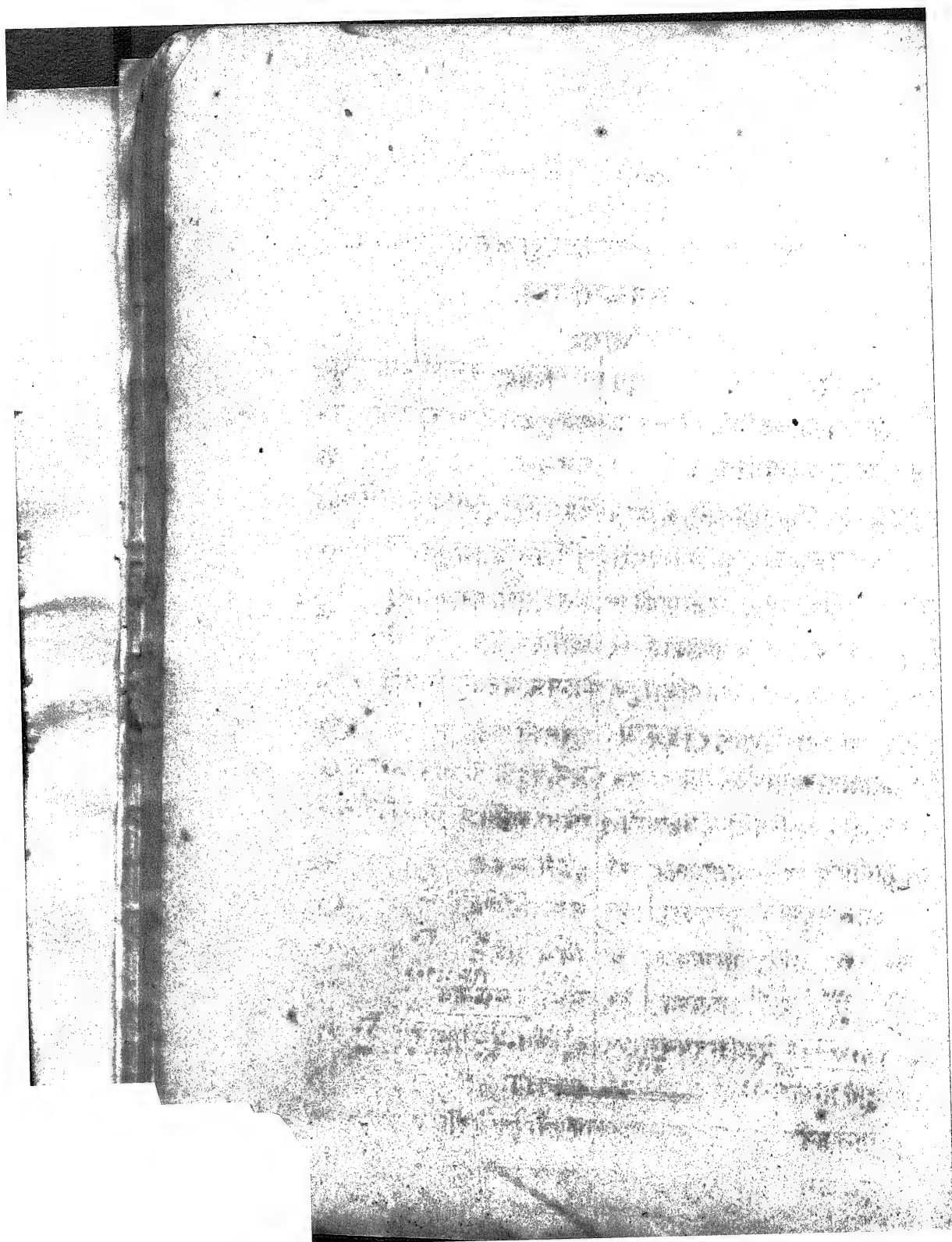
रु० ११३ : ११८ : ११

प्रश्नसमुदाय सर्वपुस्तकाचे शीवरी आहे.

समाप्त.

253244







## अनुक्रमणिका.

### भाग २

विषय.	पृष्ठ	विषय.	पृष्ठ
कार्यप्रकाशकचिन्हें: .....	१	वर्गमूळ: .....	४०
व्यवहारी अपूर्णोंक: .....	२	घनमूळ: .....	४४
व्यवहारी अपूर्णोंका चारूपभेद: ४		कोणतेही मूळ: .....	४७
"    "    चीमिळवणी: १०		वर्ग, घन, आणि मूळें: ....	५०
"    "    वजाबाकी: १८		उत्तर, गुणोत्तर, प्रमाण } .....	५४
"    "    गुणाकार: १९		आणि श्रेढी.	
"    "    भागाकार: १९		गणित श्रेढी: .....	५६
"    "    त्रैराशिवपंचरा: २०		भूमिति श्रेढी: .....	६१
दशांश अपूर्णोंक: .....	२२	सर्कत: .....	६४
"    अपूर्णोंका चीमिळवणी: ३३		एकरी सर्कत: .....	६५
"    "    वजाबाकी: २४		दुहेरी सर्कत: .....	६६
"    "    गुणाकार: २४		चक्रवाटव्याज: .....	६७
"    "    भागाकार: २८		मिश्रगणित: .....	७०
"    "    भांजणी: ३२		मध्यमिश्रगणित: .....	७०
"    "    त्रैराशिवपंचरा: ३५		सुलभमिश्रगणित: .....	७१
द्वादशांश: .....	३६	इष्टराशी: .....	७५
घातकर्म: .....	३८	एकेरी इष्टराशी: .....	७५
मूळकर्म: .....	४०	दुहेरी इष्टराशी: .....	७७

1477-1478

1479

1480

1481

1482

1483

1484

1485

1486

1487

1488

1489

1490

1491

1492

1493

1494

1495

1496

1497

1498

1499

# गणितसार.

अंकगणित.

भागदुसरा.

अपूर्णक.

कार्यप्रकाशकचिह्ने.

अंकगणित आणि बीजगणित, यांमध्ये किती एक कामांची प्रकाशक  
हणजे दाखविणारी चिह्ने आहेत, तीं व त्यांचे उपयोग खाली लिहितो.

चिह्ने

उपयोग.

+ हे चिन्ह अधिक करण्याचें ह् असें  $५+३$  अथवा अ+ब  
हणजे मिळवणीचें हें धनचिन्ह.

- हे चिन्ह उणे करण्याचें ह् अणजे  $७-३$  अथवा ब-क.  
बजा करण्याचें हें ऋणचिन्ह.

$\times$ , हीं चिह्ने गुणण्याचीं  $४ \times ३$  अथ. अ  $\times$  क, अ. ब  $\times$  ड

$\div$  हे चिन्ह भागण्याचें.  $१४ \div ७$  अथवा म  $\div$  स

= हे चिन्ह बरोबरीचें.  $५ = ३+२$  अथ. क = ब+ड

::: हे चिन्ह प्रमाण अथवा राशी  $७:१४::३:६$  अ. अ:ब::क:ड  
गणित करण्याचें.

( ) कोंस, सोकळी, हीं चिह्ने अनेक  $३(४+५)$  अथ. अ (ब+ड)

वियुक्त पदांचें एक पद दाखवितात  $३ \cdot ४+५$  अथ. अ. ब+ड

$\frac{५}{३}$ ,  $\frac{७}{२}$ , हीं चिह्ने घात प्रकाशक,  $\frac{११}{२}$ , अथवा अ, ब

\* घातप्रकाशक किंवा घातमूल प्रकाशक मूल अंकापेक्षा बारीक लिहावे.

खालील संख्येचा किती घात करावा ३१२-३ अथवा अखंड-उ  
ते दाखवितात.

१, ३ हीं चिन्हे वर्गमूळ करण्याचीं. ४७, ७२ अथवा ४७, ७२  
४, ६ हीं चिन्हे घनमूळ करण्याचीं. ४९, ९२ अथवा ४९, ९२  
१, ३ हीं चिन्हे नवे संख्ये इतकें मूळ ४५, ५६ अथवा ४५, ५६  
दाखवितात.

∴ हे चिन्ह सणजे किंवा सणून या  
शब्दांचे वाचक आहे.

### व्यवहारीअपूर्णांक.

व्याख्या.

१ कोणती एक वस्तु किंवा संख्या पूर्ण अथवा अखंड मानून, तिचे किती  
ही खंड केले तरी त्या खंड सूचकांस अपूर्णांक सणतात. जसे एक पूर्ण वस्तु  
चे नऊ सारखे भाग केले; आणि त्या भागांतून २, ५, ७ इत्यादि भाग घेत  
ले, त्या भागांस अपूर्णांक सणतात. ते लिहिण्याची रीति,  $\frac{२}{९}$ ,  $\frac{५}{९}$ ,  $\frac{७}{९}$  इ.  
रेषेचा खालचा अंगास जी संख्या आहे, तिला छेद सणतात. कारण मू  
ळ वस्तु किती भागांनी विभागिली, ती ते दाखवितात. रेषेचा वरचा अंगा  
रा जी संख्या आहे, तिला अंश सणतात. कारण मूळ वस्तुचा अपूर्णपणा  
दाखवाया साठी त्या केलेल्या भागांतून किती भाग घेतले, हे ती संख्या दा  
खविते.

२ अपूर्णांकां मध्ये जाचे छेद निरंतर दहाकावर चालतात, त्याला दशांश  
अपूर्णांक सणतात. व त्याचा भेद राहाण्यासाठी त्याला व्यवहारी अपूर्णांक

असें नाव दिलें आहे.

३ अवहारी अपूर्णाकाचा सहा जाती आहेत; सम, विषम, भागजाति, म  
भागजाति, भागानुबंध आणि मिश्र.

४ सम अपूर्णाक सणजे जाचे अंश छेदाहून उणे जसें  $\frac{४}{५}$ ,  $\frac{१३}{२०}$  इत्यादि.

५ विषम अपूर्णाक सणजे जाचे अंश छेदाहून अधिक. जसें  $\frac{६}{५}$ ,  $\frac{१३}{१०}$  इ.

६ अंश छेदाहून उणे, अधिक, किंवा बरोबर असोत; केवळ अंश छेदा-  
सक पद असलें सणजे त्यास भागजाति अपूर्णाक सणावें जसें  $\frac{६}{५}$ ,  $\frac{१३}{१०}$  इ.

७ जें अपूर्णाकाचे अपूर्णाक अथवा भागाचे भाग आहेत; त्यांस मभाग  
जाति अपूर्णाक सणावें. हे मभागजाति अपूर्णाक मध्येंचा किंवाचे घा-  
लून लिहावे, जसें  $\frac{६}{५}$  चे  $\frac{६}{५}$  अथवा  $\frac{६}{५}$  चे  $\frac{६}{५}$  इत्यादि.

८ पूर्णाक लिहून जवळच अपूर्णाक लिहितात त्याला भागानुबंध पू-  
र्णाक सणावें. जसें  $५\frac{६}{५}$  अथवा  $५\frac{६}{५}$  इ.

९ जाचे अंश आणि छेद दोनही सम, विषम अथवा भागानुबंध आहेत;  
त्यांस मिश्र अपूर्णाक सणावें जसें  $\frac{६}{५}$ ,  $\frac{६}{५}$ ,  $\frac{६}{५}$  इत्यादि.

१० कोणत्याही पूर्णाकास छेद स्थळीं एक लिहिल्याने त्याचें पूर्णाकत्व न  
मोडतां अपूर्णाकाचें रूप होते जसें ४ या पूर्णाकाचे  $\frac{६}{५}$  हे अपूर्णाक आहेत.

११ कोणताही अपूर्णाक भागाकार दाखवितो, सणजे अंशास छेदानें भा-  
गानु जो भागाकार उत्पन्न होतो, त्याचे बरोबर त्या अपूर्णाकाची किंमत आहे.

+ साधारण रीतीने विचार केला असता, अपूर्णाकाची मर्यादा एक पूर्णाक आहे; या  
जकरितां अपूर्णाकाची अंशासंख्या गटकां गटकां, जेथे छेदावसावर आली, तेथे अप-  
ूर्णाकत्व गेले, म्हणून मर्यादेचे आंत ये सम अपूर्णाक आणि बाहेर ते विषम अपूर्णा-  
क होत.

+ पूर्णाकाचा अंश लोकोत्तरून (माथून) अपूर्णाक येतात; म्हणून त्याला भागानुबंध  
पूर्णक सणावें.



जसे १५ या अपूर्णोंकाही किंमत चार आहे.

### व्यवहारी अपूर्णोंकाचारूपभेद.

व्यवहारी अपूर्णोंकाचारूप भेद लक्षणजे किंमत तीच ठेवून, रूपाचा बदल करणे हा रूप भेद अपूर्णोंकाची मिळवणी, वजाबाकी इ. करायासाठीं लावाला गेली. त्याचे किती एकमकार आहेत.

कथ.

### दृढ भाजक काढायाचे.

† दृढ भाजक लक्षणजे अनेक रकमा आहेत, त्याजा अंकानें निःशेष भागिल्या जाताना तो अंक होय. जापेक्षा दुसरा मोठा अंक निःशेष भागणारा असत नाही.

रीति.

(१) जर दोन संख्या असतील, तर मोठ्या संख्येला लहान संख्येनें भागावें, बाकी राहिल तिनें पूर्वे भाजकास भागावें; या प्रमाणें भागितां शेषदील भाज्य जो भाजकानें निःशेष भागिला जाईल, तो दृढ भाजक होय.

(२) जर संख्या दोहोंहुन अधिक असतील तर, पूर्वी प्रमाणें दोन संख्यांचा दृढ भाजक काढू, तो दृढ भाजक व तिसरी संख्या यांचा दृढ भाजक काढावा; या प्रमाणें जितक्या संख्या असतील, त्यांचा दृढ भाजक काढावा; लक्षणजे शेषदील भाजक सर्व संख्यांचा दृढ भाजक होईल.

जर अशा रीतीनें एका वाचून दुसरा दृढ भाजक निघत नाही, तर अशा संख्या अविभाज्य होत.

† एवें दृढ भाजकाचा अर्थ येता यावयाचा

+ अविभाज्य संख्या लक्षणजे जोला एका वाचून दुसरा भाजक निःशेष भागित नाही, जसे

## दृढ भाजकाची उपपत्ति.

### नियम.

(१) जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिते तेव्हां त्या संख्येस दुसरे संख्येचा भाजक म्हणावे.

(२) जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या दोन किंवा अधिक संख्यांस निःशेष भागिते तेव्हां ती संख्या त्या दुसऱ्या संख्येचा साधारण भाजक आहे. जसे ६ ही संख्या १८, ४८, १२८, २०६ यांचा साधारण भाजक आहे. कोणत्या ही संख्यांस अनेक साधारण भाजक असतात जसे वरचा संख्यांस २, ३, ६ हे साधारण भाजक आहेत.

अनेक साधारण भाजकांतून जो सर्वाहून मोठा असतो त्यास दृढ भाजक म्हणावे.

२, ३, ५, ७, ११, १३, १७ इत्यादि या संख्यांचा शेष पूर्वकाच्या पासून चालत आहे. आणि अशा संख्या जाणा यासाठी एक चांगली रीति आजचा दिवशी अपेक्षित आहे. (इराता संथेनीस) यानामे एक मोठा ज्योतिषी मिश्र देशांत होता, त्याने या अपेक्षित साठी एक युक्ती काढली जी सचलनी असताच ठेविले आहे. काही त्या युक्तीने अविभाज्य संख्या इतर संख्यांहून निराख्या करिता येतात.

एका पासून कोणतेही इच्छिते संख्ये पावेनां सर्व विषय संख्या अलुकराने लिही जसे १, २, ५, ७, ११, १३, १५, १७, १९, २१, २३, २५, २७, २९, ३१, ३३, ३५, ३७, ३९, ४१, ४३, ४५, ४७, ४९, ५१, ५३, ५५, ५७, ५९, ६१, ६३, ६५, ६७, ६९, ७१, ७३, ७५, ७७, ७९, ८१, ८३, ८५, ८७, ८९, ९१, ९३, ९५, ९७, ९९.

प्रथम तीन या अविभाज्य संख्ये पासून आरंभ करून तिसऱ्या तिसऱ्या संख्येवर बिंदू कर, या संख्या तिहींनी निःशेष भागल्या जातात. नंतर पांचा पासून पांचवे पांचवे स्थानी बिंदू कर, या संख्या पांचांनी निःशेष भागल्या जातात. पुनः सातों पासून आरंभ करून, सातवे सातवे स्थानी बिंदू कर, त्या संख्या सातानी निःशेष भागल्या जातात. असें केले असता या संख्यांवर बिंदू नाहींत, त्या संख्या अविभाज्य जाणाव्या.

सर्वसम संख्यांमध्ये दोनही संख्या मात्र अविभाज्य आहे.

(३) जर एक संख्या दोन संख्यां स भागिते, तर ती त्यांची बेरीज, वजाबाकी, आणि त्या संख्यां स कोणते ही संख्येने गुणिलेले गुणाकार यां स ही भागील जसे ६ ही संख्या ३६ आणि १८ यां स भागिते तर ती ८४, १२, ७२, १६ यां स ही भागील.

(४) जर एक संख्या दुसऱ्या एके संख्ये स भागिते तर जितक्या संख्यां स ही दुसरी संख्या भागिते तितक्या संख्यां स ती त्रयम संख्या भागील. जसे ६, १८ या संख्ये स भागितात आणि १८, ३६, ५४, ७२, ९० यां स भागितात तर ६ हे ३६, ५४, ७२, ९० यां स ही भागितील.

(५) जी संख्या भाज्य आणि भाजक यां स भागिते ती त्याचे बाकी स ही भागील, या सव भाज्य आणि भाजक यांचा जो साधारण भाजक तो च भाजक आणि बाकी यांचा ही आहे. आणि याचे उलट भाजक आणि बाकी यांचा जो साधारण भाजक तो च भाज्य आणि भाजक यांचा ही आहे. जसे भाज्य ३६६ भाजक ११४ यांचा भागाकार ३ आणि बाकी २४ यांत साधारण भाजक ६ आहे, म्हणजे ६ हे ३६६ आणि ११४ यां स भागितात तर तेच ११४ आणि २४ यां स ही भागितील, यावरून दृढ भाजक काढण्याची रीति खाली लिहिल्या प्रमाणे:

३६६ भागिले ११४ या पासून बाकी २४ | २४ भा० १८ या पा० बाकी ६

११४ भागिले २४ या पासून बाकी १८ | १८ भा० ६ या पा० बा० राहत नाही.

आतो ६ हे ६ आणि १८ यां स निःशेष भागितात, या सव ६ आणि १८ यांचा दृढ भाजक ६ आहे, कारण सदा यां स ६ हुन दुसरी कोणती ही मोठी संख्या निःशेष भागूं शकत नाही. तरी १८ चा ६ हुन दुसरा मोठा भाजक आहे, तरी ती ६ आणि १८ यांचा साधारण भाजक नाहीत.





## उदाहरणें.

(१)  $\frac{345}{428}$  यांचा अतिसंक्षेप काय होतो? (२)  $\frac{146}{238}$  यांचा अतिसंक्षेप काय होतो?  
 यांचा दृढ भाजक ६ आहे, त्याने अंश  $\frac{146}{238} = \frac{73}{119} = \frac{7}{11} = \frac{7}{11}$  संक्षेप होऊन उत्तर  
 छेदांस भागून  $\frac{7}{11}$  संक्षेप होऊन उत्तर

## दुसरा प्रकार.

भागानुबंध पूर्णांकास बरोबर भावाचें  
 विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

## रीति.

+ पूर्णांकास अपूर्णांकाचे छेदांनीं गुणून त्यांत अंश मिळवावे; आणि  
 त्या रवालीं ते छेद लिहावे. सगळे इच्छितें रूप झालें.

## उदाहरणें.

(१)  $\frac{20}{4}$  या भागानुबंध पूर्णांकास (२)  $\frac{62}{3}$ ,  $\frac{409}{11}$  आणि  $\frac{1014}{3}$  या  
 विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

$$\frac{20}{4} \text{ अथवा } \frac{(20 \times 4) + 2}{4} = \frac{82}{4}$$

भागानुबंध पूर्णांकास विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

$$\text{उत्तर } \frac{82}{4}, \frac{409}{11}, \frac{1014}{3}$$

## तिसरा प्रकार.

विषम अपूर्णांकास बरोबर भावाचें पूर्णांका  
 चें अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा

+ उच्च आहे की, अपूर्णांकाचे छेदांनीं पूर्णांक गुणिले असता वो गुणाकार  
 त्या अंशांची सज्जती येईल, याजकरितां कोणत्याही अवयवांस भे लक्षा से  
 रत्येने गुणिले आणि तो गुणाकार त्या रत्येने भागिला असता किमतीत बदल  
 होत नाही. कोणताही अपूर्णांक हेंच दाखविवी की, अंशांस छेदांनीं भागाचें



## रीति.

॥ अंशांस छेदांनी भागावे भागाकार येईल, तो इच्छित पूर्णांक अथवा भागानुबंध पूर्णांक होईल.

## उदाहरणे.

- (१)  $\frac{४१२}{१७}$  या विषम अपूर्णाकास व (२)  $\frac{६४३२}{३२१७}$ ,  $\frac{३२१७}{३२१७}$  आणि  $\frac{१२५}{६८}$  या-  
 रावर भावाचे पूर्णाकाचे अथवा भागानुबंध पूर्णाकाचे रूपदे. विषम अपूर्णाकास बराबर भावाचे पूर्णाकाचे अथवा भागानुबंध पूर्णाकाचे रूपदे. उत्तर,  $८०४, २१४\frac{१७}{३२}, १\frac{५७}{६८}$

$$४१२ \div १७ = २४\frac{४}{१७} \text{ हें उत्तर.}$$

## चवथा प्रकार.

पूर्णाकास बरोबर भावाचे अपूर्णाकाचे रूपद्या-  
 वयाचा, जाचे छेद सांगितले संख्ये बरोबर होतील.

## रीति.

+ पूर्णाकास सांगितले छेदांनी गुणून त्या गुणाकारा स्वार्थी सांगितला छेद लिहावा ह्याने इच्छित अपूर्णाकाचे रूप झालें.

## उदाहरणे.

- (१) ८ या पूर्णाकास अपूर्णाकाचे (२) १३१, २६५, ९९२ या पूर्णाकास  
 रूपदे. जाचे छेद ११ होतील. अपूर्णाकाचे रूपदे. जाचे छेद १०, ३५,  
 १२ होतील.

$$८ \times ११ = ८८$$

उत्तर  $\frac{८८}{११}$

$$\text{उत्तर } \frac{२२३७}{१७}, \frac{१२५७५}{३५}, \frac{११९०४}{१२}$$

॥ ही रीति पूर्व रीतीने उलट आहे, आणि हिचे कारण सरळ भागाकाराचे गुणा पासून मकट आहे.

+ एवें सरळ अंकाचे गुणाकार व भागाकार रीतिने जाडून हाडून मकट कि मतीत फेर पडत नाही.

## पांचवाप्रकार.

प्रभागजातिअपूर्णाकासभागजातिअपूर्णाकांचें  
रूपद्यावयाचा.

रीति.

+ सर्व अंदा परस्पर गुणून, तो गुणाकार अंदा स्थळी लिहावा, आणि स  
र्व छेद परस्पर गुणून तो गुणाकार छेद स्थळी लिहावा, ह्मणजे इ छिलें क  
प झालें. त्यांत होईल तर अंदा छेदांत संक्षेप करावा.

### उदाहरणें.

(१)  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$  चा  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$  या प्रभाग जातिअपूर्णाकास बरोबर भावाचे आणि  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$  या प्रभागजातिअपू  
र्णाकास बरोबर भावाचे भागजातिअपूर्णाकांचें रूप दे.  
 $\frac{३}{४} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{२}{३} = \frac{१००}{६४८} = \frac{२५}{१६२}$  अ.  
 $\frac{३}{४} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{२}{३} = \frac{१००}{६४८} = \frac{२५}{१६२}$  हे उत्तर.

(२)  $\frac{३}{४}$  चा  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$ ,  $\frac{२}{३}$  चे  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$   
र्णाकास बरोबर भावाचे भागजाति  
अपूर्णाकांचें रूप दे.  
उत्तर  $\frac{२५}{१६२}$ ,  $\frac{२५}{१६२}$ ,  $\frac{२५}{१६२}$

### सहावाप्रकार

विषमछेदअपूर्णाकास किंमत न बदलता  
समछेदकरावयाचा.

समछेद करण्यासाठी अपूर्णाकरकमा भागजाति (सरळ अपूर्णाक)

+ या रीतीची सत्यता या प्रमाणें दाखवितां जाते. सांगितले प्रभागजाति अपू  
र्णाक  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$  आहेत. आतां  $\frac{३}{४}$  चा  $\frac{२}{३}$  =  $\frac{२}{३}$  =  $\frac{२}{३}$  याच कतितां  $\frac{३}{४}$  चे  $\frac{२}{३}$  =  $\frac{२}{३}$  ×  $\frac{२}{३}$   
=  $\frac{२५}{१६२}$  ह्मणजे त्या अपूर्णाकाचे अंदा, अंशांचा गुणाकार बराबर आणि छेदे छे  
दे वा गुणाकार बराबर आहेत. जेही प्रभागजाति अपूर्णाकांत दोघां पैसां अधिक  
अवयव असतील तेही सर्व अंदा परस्पर गुणावे तो गुणाकार अंदा आणि सर्व  
छेद परस्पर गुणावे तो गुणाकार छेद होत. यांत होईल तर अंदा छेदांत संक्षेप  
करावा.

असल्या पाहिजेत, तज्ञानसल्यास पूर्वमकारांममाणे कराव्या.

### रीति.

म्बे अंशां करितां प्रति अपूर्णाकांचे अंश त्यांचे त्यांचे छेदां वाचून सर्व छेदांनीं गुणावे, ते गुणाकार अंश होत, आणि समछेद करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे. तो गुणाकार छेद होय.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{१}{२}, \frac{३}{४}, \frac{५}{६}$  यांस बरोबर भावांचे समछेद अपूर्णाकांचे रूपदे.

$$१ \times ३ \times ५ = १५ \text{ हा } \frac{१}{२} \text{ चा नवा अंश}$$

$$३ \times ३ \times ५ = ४५ \text{ हा } \frac{३}{४} \text{ चा नवा अंश}$$

$$४ \times ३ \times ५ = ६० \text{ हा } \frac{५}{६} \text{ चा नवा अंश}$$

$$२ \times ३ \times ५ = ३० \text{ हा सर्वांचा समछेद}$$

$$\frac{१५}{३०}, \frac{४५}{३०}, \frac{६०}{३०} \text{ होऊन}$$

(२)  $\frac{५}{६}$  चे  $\frac{३}{४}$ , आणि  $\frac{१}{२}$  यांचा समछेद कर. उत्तर  $\frac{५०}{१२०}, \frac{१५०}{१२०}$

जर सर्व छेदांचा दृढ भाजक मिळेल तर त्याने छेद भागून भागाकार त्याचे त्याचे खाली मांडावे, नंतर प्रति रकमेचे अंश आणि छेद दोनही त्याच्या छेदाचे भागाकारा वाचून दुसऱ्या रकमा खालील भागाकारांनी गुणावे गुणाकार येतील ते इच्छिते समछेद होतील.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{१}{२}, \frac{३}{४}$  आणि  $\frac{५}{६}$  यांस समछेद

रूपदे छेदांचा दृढ भाजक २४ यांनी छेद

द भागून  $\frac{१२}{२४}, \frac{३६}{२४}, \frac{२०}{२४}$  होऊ.

(२)  $\frac{३}{४}, \frac{५}{६}$  आणि  $\frac{१}{२}$  यांस समछेद

रूपदे छेदांचा दृढ भाजक १२ आहे.

उत्तर,  $\frac{१०८}{१०८०}, \frac{२२५}{१०८०}, \frac{१४०}{१०८०}$

जर अंश आणि छेद यांचा साधारण दृढ भाजक असेल तर त्या वेगळ

त्या संख्यांचे स्थानी त्यांचे गुण्य गुणक रूप अवयव मांडावे आणि सांत

+ वागुण्य गुणकरूप केले अवयव भक्त रूपात.

साधारण अवयव असतील ते रद्द करून पूर्व रीतिप्रमाणें सम छेद करावे.

### उदाहरण.

(१)  $\frac{8}{5}, \frac{5}{4}, \frac{12}{3}$  यांस सम छेद रूपदे.

$$\left. \begin{aligned} 8 \times 4 \times 3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 &= 240 \\ 5 \times 5 \times 4 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 4 &= 400 \\ 12 \times 5 \times 3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 &= 1080 \\ 5 \times 4 \times 3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 &= 240 \end{aligned} \right\} \frac{240}{84}, \frac{400}{84}, \frac{1080}{84} \text{ हें.}$$

### लघुतम साधारण गुणाकार.

कोणत्या ही संख्यांचा साधारण गुणाकार ह्मणजे जा गुणाकारास त्या संख्यांनी पृथक् पृथक् भागिलें असतां भागाकार निःशेष होतो तो लघुतम साधारण गुणाकार हा फारच लहान साधारण गुणाकार आहे तो काढण्याची रीति.

सांगितल्या संख्या एके ओळीत लिहाव्या. जर त्यांतील दोन किंवा अधिक संख्या २ या अविभाज्य संख्येने भागिल्या जातात तर भागून भागाकार त्याचें त्याचें स्थळीं दुसरे ओळीस लिहावे आणि जा भागत नाहीत त्या तशाच दुसरे ओळीस लिहाव्या. पुनः या दुसरे ओळीस दोन यांणी भागावें या प्रमाणें भागितां दोहोनीं भागजात नाहीत तेव्हा ३ या अविभाज्य संख्येनें भागावें तिहीनीं भागजात नाहीत तेव्हा ५, ७, ११ इत्यादि अविभाज्य संख्यांनी अनुक्रमे भागित जावें असें की, त्यातील दोन संख्या भागिल्या बाबून रहात पर्यंत. नंतर सर्व भाजक व शेषील ओळीतील बाकी अंक हे सर्व परस्पर गुणावे, जो गुणाकार येईल, तो लघुतम साधारण गुणाकार होईल.

### उदाहरणें.







सांगितले अपूर्णांकस अतिसंक्षेप समछेद रूप द्यावे, नंतर त्या नवे  
अंशांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढून त्या समछेदाने भागावे.  
भागाकार येईल, तो इच्छित लघुतम साधारण गुणाकार होईल.

### उदाहरणे.

(१) $५\frac{१}{२}, ४\frac{३}{४}$ आणि $\frac{११}{१६}$ यांचा लघुतम	(२) $\frac{१}{२}, \frac{३}{४}, \frac{५}{६}$ आणि $\frac{७}{८}$ यांचा लघुतम
साधारण गुणाकार काढ.	साधारण गुणाकार काढ
$\frac{५५}{१६}, \frac{५५}{१६}, \frac{५५}{१६}$ हे अतिसंक्षेप सम	उत्तर, ५४
छेद रूप आहे. यांत ८४, ५२, १४ या	
चा लघुतम साधारण गुणाकार ५५	
यास १५ यांनी भागून भागाकार.	
उत्तर, ३१ $\frac{३}{४}$	

### लघुतम साधारण गुणाकार काढून समछेद.

सांगितल्या अपूर्णांकस संक्षेप रूप देऊन, छेदांचा लघुतम साधा  
रण गुणाकार काढावा, नंतर त्या गुणाकारास वेगळाले छेदांनी भागून  
त्या भागाकारास त्याचे त्याचे अंशांनी गुणावे, नंतर त्या त्या गुणाकारा  
स्वालों तो छेदांचा साधारण गुणाकार मांडावा. संपजे लघुतम साधारण  
गुणाकार काढून समछेद झाले.

### उदाहरणे.

(१) $\frac{३}{४}, \frac{५}{६}, \frac{७}{८}$ यांस अतिसंक्षेप	(२) $\frac{१}{२}, \frac{३}{४}, \frac{५}{६}$ आणि $\frac{७}{८}$ यांस अतिसंक्षेप
समछेद रूप दे.	संक्षेप समछेद रूप दे.
छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार	उत्तर $\frac{१३}{१६}, \frac{१३}{१६}, \frac{१३}{१६}$
र २०० आहे हा छेद.	

$$\left. \begin{aligned} \frac{100}{3} \times 2 &= 133 \\ \frac{100}{3} \times 4 &= 133 \\ \frac{100}{3} \times 6 &= 133 \end{aligned} \right\} \text{ हे अंश.}$$

उत्तर  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

### सातवाप्रकार.

मिश्रअपूर्णाकास शून्यअपूर्णाकाचें रूप द्यावयाचा.  
रीति.

अपूर्णाकाचे दोनही अवयवांस सरळ अपूर्णाकाचें रूप द्यावे; नंतर प्रत्येकाचे अंशास दुसऱ्याचे छेदानें गुणावे; ह्मणजे शून्यअपूर्णाकाचें रूप झालें.

टीप. याची सिद्धता अपूर्णाकाचे भागाकारांत पहावी.

### उदाहरणें.

(१)  $\frac{5}{3}, \frac{4}{3}$  या मिश्र अपूर्णाकां- (२)  $\frac{5}{3}$  या मिश्र अपूर्णाकास शून्यअपूर्णाकाचें रूप दे.

$\frac{5}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{5}{1}$  आणि  $\frac{4}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{1}$  उत्तर.

### आठवाप्रकार.

कोणत्याही अपूर्णाकाचा भावत्याचा पूर्णाक अवयवांत काढावयाचा.  
रीति.

पूर्णाकांत जर अनेक भावाचे अवयव आहेत, तर त्यास विविध गुणाकाराचे रीतीनें अंशांनं गुणून त्या गुणाकारास छेदानें भागावें बाकी राहिल्यास उत्तराचे भाजणीचे रीतीनें त्याचे हळके अवयव क

रक्त छेदांनीं भागावें. भागाकार येईल तो हल के जातीचा पूर्णांक झाला.

## उदाहरणें.

(१) २५ रुपये ३ आणे यांचे  $\frac{५}{६}$  हे

(२) १७ विघे उपोड १६ काठ्या यांने

पूर्णकांत किती किमतीचे आहेत?

॥ हे पूर्णाकान्त किती किमतीचे आ

रु० आ०

हैत? वि. पां. का.

२५ - ३

उत्तर १० -- ० -- ११

62900 - 92 ५

उत्तर १० - ० - ११

५४ .. ६ .. ३ ३/६ उत्तर.

1000

## नववाप्रकार

अपूर्णाकासबराबर किमतीचे

हलकें किंवा भारी रूप द्यावयाचा.

हीति.

हलके जातीचे अवयव त्याचे वरचे भारीरूपाचे एकुलत किती आ  
हेत, ती विचार करावा; नंतर जर हलकें रूप द्यावयाचें आहे, तर अंशां  
स त्या हलके जातीचे अवयवांनीं गुणावें; आणि भारी रूप द्यावयाचें  
आहे तर त्यांनीं छेदांस गुणावें

उदाहरणें.

(१) १ रुपयाचे नू यां स पें चें अपु-  
णं कि रूप दे.

(३) वज्रनी एकाचोराचे ह्यां सखं  
जीचे रूपदे.

१४४ पै उतर.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ खंडी है उत्तर.}$$

(२) हस्तचिह्न ३५ यां सद्मा मादं  
हस्तचिह्न ३५ यां सद्मा मादं

(४) २३ कुटीचे १३ पांस मीलाचे ल  
पदे. उत्तर २३५०० मील

उ० १०११ १/२

उत्तर  $\frac{6}{26400}$  मील

\* या रीतीने घृणांकांतील भोजणांविषीं सारूप्य आहे.

## व्यवहारी अपूर्णाकाची मिळवणी. रीति.

जर अपूर्णाक समछेद आहेत, तर सर्व अंश एकत्र मिळवून त्याचे खा-  
ली समछेद लिहावा; म्हणजे मिळवणी झाली.

जर अपूर्णाक समछेद नाहीत तर समछेद करून मिळवणी करावी;  
परंतु अपूर्णाक म भागजाति असल्यास भागजाति करावे; अनेकजा ती  
चे असल्यास एक जातीचे करावे; भागानुबंध असल्यास विषम अपूर्-  
णाक करावे; नंतर समछेद करून वेरीज घ्यावी. अथवा रकमा भागा-  
नुबंध असल्यास अपूर्णाकांची वेरीज घेऊन ती पूर्णाकांचे वेरजेस  
जोडून लिहावी.

+ जशी क्रि. ती. पदांची वेरीज किंवा वजाबाकी होत नाही म्हणजे तीं नरूपे आ-  
णि दोन पेसे यांची वेरीज ५० किंवा ५ पेसे नाही. आणि वजाबाकी १० किंवा १ पेस  
नाहीं. तर वेरीज किंवा वजाबाकी होण्यास पदे सजातीय असली पाहिजेत. सामान्य  
येच विषमछेद पदांची वेरीज किंवा वजाबाकी होत नाही. याज करिता त्यास समछे-  
द केले म्हणजे ते एकेवस्तूचे सारखे तुकडे झाले. मग त्यांची वेरीज किंवा वजाबाकी  
राख्य आहे.

मळ ते कोणते ही दोन अपूर्णाक घेतले, जसे  $\frac{५}{६}$  आणि  $\frac{३}{४}$  हे बरोबर भावांत आ-  
हेत, किंवा नाहीत हे त्यास समछेद केल्यानेतर त्यांचे अंशां पासून मसिद्ध होतं या  
ज करिता जर  $२५ \times ९$  आणि  $५ \times ४५$  या प्रमाणे दोन बरोबर भावांचे गुणाकार हो-  
तात. तर या पासून बरोबर भावांचे दोन नवे अपूर्णाक उत्पन्न होतील, जसे  $\frac{५५}{६५}$   
 $\frac{३५}{४५}$  अथवा  $\frac{३५}{६५} = \frac{३५}{६५}$

तेव्हा जर बरोबर भावांचे दोन अपूर्णाक घेतले जसे  $\frac{५}{६}$ ,  $\frac{३५}{४५}$  तर  $२५ \times ९ = ५ \times ४५$   
या मते कांतांन  $५ \times ९$  हे वजा करून  $(२५ - ५) \times ९ = (४५ - ९) \times ५$  याज करिता हे न-  
पूर्णक रूप उत्पन्न होते.  $\frac{२५-५}{६५} = \frac{३५}{६५}$  अथवा  $\frac{३५}{६५} = \frac{३५}{६५}$

या रीतीने जर  $\frac{५}{६}$  या अपूर्णाकाची पदे  $\frac{३५}{४५}$  या अपूर्णाकाचे पदाशी अनुक्रमे  
मिळविऊन तरी ही त्यास बरोबर भावांचे रूप होते जसे  $\frac{२५ \times ९}{६५ \times ४५} = \frac{३५}{६५} = \frac{३५}{६५}$

अथवा सामान्यतः जर  $\frac{अ}{ब}$  =  $\frac{क}{द}$  तर या प्रमाणे दास विड जाते  $\frac{अ \times द}{ब \times द} = \frac{अ \times क}{ब \times द}$



## उदाहरणें.

(१)  $\frac{१}{२}$  आणि  $\frac{१}{२}$  यांची बेरीज कर.

$$\text{आतां } \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = \frac{२}{२} = १ \text{ हें उत्तर.}$$

(२)  $\frac{१}{२}$ ,  $\frac{१}{३}$  आणि  $\frac{१}{४}$  यांची बे.

$$\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} = \frac{६}{१२} + \frac{४}{१२} + \frac{३}{१२} = \frac{१३}{१२} = १\frac{१}{१२} \text{ हें उत्तर.}$$

(३) रुपयाचे  $\frac{१}{२}$  आणि आण्वाचे $\frac{१}{२}$  यांची बेरीज कर.

$$\frac{१}{२} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{४} \text{ रु. } \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = \frac{२}{२} + \frac{१}{२} = \frac{३}{२} \text{ रु. हें उत्तर.}$$

व्यवहारी अपूर्णाकांची वजाबाकी.  
रीति.

जसे मिळवणी करावया करितां अपूर्णाक सजातीय व समछेद केले, तसे वजाबाकी करितां करावे; नंतर अधिक अंशांत थोडे अंशा वजा करून बाकी राहील तिचा स्वालीं समछेद लिहावा. अथवा जी रकम वजा करावयाची तिचे अंशा दुसऱ्या रकमेचा अंशांतून वजा करावे, बाकी स्वालीं समछेद लिहावा. कदाचित् वजा करावयाची रकम मोठी असलेलतर बाकी उणी राहील.

## उदाहरणें.

(१)  $\frac{१}{२}$  आणि  $\frac{१}{२}$  यांची वजाबाकी

कर.

$$\frac{१}{२} - \frac{१}{२} = ० \text{ हें उत्तर.}$$

(२) रुपयाचे  $\frac{१}{२}$  चे  $\frac{१}{२}$  आणि पावल्याचे  $\frac{१}{२}$  यांची वजाबाकी कर.

$$\text{उत्तर } १\frac{१}{२} \text{ रुपय.}$$

याजकरितां जेव्हां बरोबर भावाचे दोन अपूर्णाक आहेत, तेव्हा दोघांचे अंशांची बेरीज अथवा वजाबाकी अशा आणि दोघांची बेरीज अथवा वजाबाकी छेद यां पासून जे नवे दोन अपूर्णाक होतील ते त्या पूर्वी दोन अपूर्णाकांचे बरोबर भावाचे आहेत, हे प्रतिपाद्य बहुतेक उपयोगी आहे, असे पुढे मगाल रीतीत कळेल.



(१३)  $\frac{७}{१२}$  आणि  $\frac{१३}{१२}$  यांची व-  
उत्तर  $\frac{७}{१२}$

(१४) कुडीचे  $\frac{१३}{१२}$  आणि याडीचे  $\frac{१३}{१२}$  चे  
ये यांची वजाबाकी.

उत्तर  $\frac{४८}{१२०}$  पाई.

## व्यवहारी अपूर्णाकाचा गुणाकार रीति.

रकमा भागानुबंध असतील, यांस विषम अपूर्णाकाचे रूप घावे, नंतर गुणाकाराचे अंदां करितां सर्वअंदां परस्पर गुणाचे आणि छेदां करितां सर्वछेद परस्पर गुणाचे, म्हणजे गुणाकार होईल. यांत गुणाकार केल्यानंतर किंवा गुणाकार करण्या पूर्वी होईल तर अंदां छेदांत संक्षेप करावा.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{६}{८}$  यांस  $\frac{३}{४}$  यांनी गुण.

$\frac{६}{८} \times \frac{३}{४} = \frac{१८}{३२}$  हे उत्तर.

(२) खंडीचे  $\frac{३}{४}$  यांस  $\frac{३}{४}$  यांनी

गुण. उत्तर  $\frac{९}{१६}$  खंडी.

(३)  $\frac{१३}{१२}$  चे  $\frac{१३}{१२}$  यांस  $\frac{१३}{१२}$  यांनी गुण.

$\frac{१३}{१२} \times \frac{१३}{१२} \times \frac{१३}{१२} = \frac{२१९७}{१७२८} = १ \frac{४६९}{१७२८}$

(४)  $\frac{३५}{३२}$  यांस  $\frac{३५}{३२}$  यांनी गुण.

$\frac{३५}{३२} \times \frac{३५}{३२} = \frac{१२२५}{१०२४} = १ \frac{१९१}{१०२४}$  हे उत्तर.

## व्यवहारी अपूर्णाकाचा भागाकार. रीति.

जसे वजाबाकी करितां सम छेद करण्या पूर्वी अपूर्णाक तयार केले,

+ अपूर्णाकास पूर्णाकानें गुणायाचे आहे तेव्हां सांगितले अपूर्णाकाचे छेद त्या पूर्णाकानें किरीप भागतील तर भागानु भागाकार छेद स्वकी सिद्धावा म्हणजे गुणाकार होईल. तसें न होईल तर पूर्णाकानें अंदां गुणाचे, म्हणजे गुणाकार होईल.

तसे भागाकारा करितां करावे; भाज्यभाजक अनेक जातीचे असल्यास एक जातीचे करावे; नंतर भाज्याचे अंश आणि छेद भाजकाचे अंश आणि छेद यांनी अनुक्रमे निशेष भागिले जातील, तर भागावे; आणि निशेष भागिले न जाता, तर भाजकाचे अंश छेद बदल करून त्याणी भाज्यास गुणावे स्वणजे भागाकार होईल

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{45}{30}$  यांस  $\frac{15}{5}$  यांनी भाग

$$\frac{45}{30} \div \frac{15}{5} = \frac{45}{30} \times \frac{5}{15} = \frac{45 \times 5}{30 \times 15} = \frac{225}{450} = \frac{1}{2} \text{ हे उत्तर.}$$

(२) खंडीचे  $\frac{3}{5}$  यांस मणाचे  $\frac{1}{2}$

यांनी भाग. उत्तर  $\frac{6}{5}$  हे

(३)  $\frac{25}{5}$  यांस  $\frac{10}{2}$  यांनी भाग

$$\frac{25}{5} \div \frac{10}{2} = \frac{25}{5} \times \frac{2}{10} = \frac{25 \times 2}{5 \times 10} = \frac{50}{50} = 1 \text{ हे उत्तर.}$$

(४)  $\frac{15}{30}$  यांस = यांनी भाग.

$$\frac{15}{30} \div 1 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ हे उत्तर.}$$

## व्यवहारी अपूर्णाकाचे त्रैरा

### शिकवपंचराशिक.

#### रीति.

+ या रीतीची सत्यता बीज रीतीने दाखवितो; जसे  $\frac{45}{30}$  हे भाज्य  $\frac{15}{5}$  यांनी भाग जे आहेत. आतां दुसरे प्रकारचे टिपित सांगितल्या ममाणे अपूर्णाकास हर एक संख्येने गुणिले आणि भागिले असतां त्या पदांत फेर फार होत नाही याज करितां  $\frac{45}{30} \times \frac{15}{5} = \frac{45 \times 15}{30 \times 5} = \frac{675}{150} = \frac{9}{2}$  आहे. यांस भाजकाने भागून  $\frac{9}{2} \times \frac{5}{15} = \frac{9 \times 5}{2 \times 15} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$  हे उत्तर होत. याज वरून अपूर्णाकाचे भागाकाराने भाजकाचे अंश आणि छेद बदलून भाज्यास गुणिले असतां भागाकार होतो हे पर्यवसीव्त्स आहे; परंतु भाजकाचे अंश आणि छेद यांनी भाज्याचे अंश आणि छेद यांस भाग जात नाही, असे अपूर्णाकच नाहीत, असे स्वणण्यास योग्य होईल. हे वरील रीती वरून स्पष्ट आहे.

१. अपूर्णाकास पूर्णाकाने भागायाचे आहे ते को त्या पूर्णाकाने अंश निशेष भागतील तर भागावे; तसे न होईल तर छेद गुणावे स्वणजे भागाकार झाला.

२. जे भाज्य आणि भाजक दोन्ही सम छेद आहेत तेव्हा भागाकाराचे अंशा करितां भाज्याचे अंश आणि छेद करितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

पूष्णिकांत त्रैराशिक व पंचराशिक यांची रीति सांगितली आहे त्याप्रमाणेच त्यांत वयांत भेद इतकाच नोंद देत स्वरूप करणें गुणाकार, भागाकार करणें, तें सर्व अपूष्णिकाचे रीतीनें करावें.

### उदाहरणें.

(१) जर १ विघ्याचे  $\frac{१}{२}$  पांस १ रुपयाचे  $\frac{१}{२}$  पडलात, तर १ विघ्याचे  $\frac{१}{२}$  पांस काय पडेल.

$$\begin{array}{cccc} \text{वि०} & \text{वि०} & \text{रु०} & \text{रु०} \\ \frac{१}{२} & : & \frac{११}{३२} & :: \frac{३}{५} : \frac{३९७}{६४०} \end{array}$$

$$\frac{११}{३२} \times \frac{३}{५} = \frac{३३}{१६०} \div \frac{३}{५} = \frac{३३}{१६०} \times \frac{५}{३} = \frac{३९७}{६४०} \text{ रुपये हें उत्तर}$$

(२) एक काठी तळ्यांत उभी केली ती ती  $\frac{३}{४}$  चिखलांत गेली,  $\frac{१}{२}$  पाण्यांत बुडाली, आणि वरती ३ हात राहिली, यावरून ती काठी किती? व तळ्यांत चिखल व पाणी किती होते तें सांग?

उत्तर, काठीची लांबी ३६ हा० वि० १२ हा० पाणी ३६ हा०

(३) एकाचे घरीं १६ घटिका दिवसास लग्न लागावयाचें होतें. कांहीं घटिका भरल्यावर यजमानाने जो ब्यास विचारिले, किती घटिका भरल्या तेव्हां त्याने सांगितलें कीं, यावेळे पासून लग्न लागे पर्यंत आघटिका भरावयाचा आहेत, त्यांचे  $\frac{१}{२}$  भरल्या यावरून लग्न लागावयास किती घटिकांचा अवकाश आहे?

उत्तर  $\frac{१}{२}$  घटिका अवकाश.

(४) अ आणि ब यांजवळ कांहीं रुपये आहेत; जेव्हां ब आपले रुपयांचे  $\frac{१}{२}$  अला देतो तेव्हां १५५ रुपयांची वस्तु बण्यास असंमर्थ होतो; परंतु ब जर आपले रुपयांचे  $\frac{१}{२}$  देता तर १६५ रुपये १० आणें.

हून जास्त रुपयाची वस्तु अला घेववली नसती यावरून अ आणि व यांजवळ सुळचे किती रुपये होती.

उत्तर अजवळ ८० रुपये आणि बजवळ १०० रुपये.

(५) कांदी एक काम अब ३ दिवसांत करितात तेच काम अक ३० दिवसांत करतात आणि बक  $\frac{५}{६}$  दिवसांत करतात तर अबक मत्तये कीं करू लागले असतां किती किती दिवसांत करतील?

उत्तर अ ४ दिवसांत, ब १२ दि० आणि क १६ दि०

### दशांशअपूर्णांक.

दशांशअपूर्णांक सणजे जाचे छेद दशांशकावर चालतात जसे १०, १००, १००० इत्यादि याचाने म असा आहे की, छेदांत जितकीं दशांश एक या अंकावर आहेत तितकीं अंक स्थळें असतात याचे लिहिण्या नामकार असा आहे की, अंश लिहून त्याचे डावेकडे (०) असा विंदु घायाजसें— दशांशअपूर्णांक  $\frac{३}{१०}, \frac{३५}{१००}, \frac{३४२}{१०००}$   
व्यवहारीअपूर्णांक  $\frac{३}{१०}, \frac{३५}{१००}, \frac{३४२}{१०००}, \frac{३}{१०००}$

अह अंश एक अंकाचा आणि छेद १०० असेल, तर त्या अंशाचा डावे कडे एक दश्या देऊन मार्गे दशांश चिन्ह करावे, आणि छेद १००० असल्यास दोन दश्यां द्यावी. यांत मार्गे इतकीं दश्यां द्यावी की, अंश स्थळाची संख्या छेदांतील दश्या बरोबर होईल.

जिथे दशांश संख्या तीन आहे, जीव पूर्णांक असून अपूर्णांक आहेत, आणि जिथे प्रेद मधील विंदू करून स्पष्ट होतो जसे  $\frac{४०२५}{१०००}$  अथवा  $\frac{४०२५}{१०००}$  ही एकच आहे.





## उदाहरणें.

(१)	(२)
१५२१ - ३४६८७९	१९५६ - ७२४३
८५४ - १५२२०७५	१३९५३ - २७७४६८६
१८३२१ - ६१९३	६१८ - ८३३९६५
२०६२७ - ११८३८६५ उत्तर	१६५२८ - ८३५७३३६

## दशांशबजाबाकी.

देखी एकमांतील अंक मिळवणी प्रमाणें आपआपले स्थानी लिहावे; नंतर पूर्णांक रीती प्रमाणें उजवे कडून आरंभ करून, बाजाबाकी करावी, आणि मिळवणीत सांगितल्या प्रमाणें दशांश चिन्ह करावे.

## उदाहरणें.

(१)	(२)
६८३२ - ५३२	८३४३१५ - १३५
११३ - १८४८	१७६३३ - ५९४
६६३९ - ३४७ बाकी उ.	८५६६८१ - ६४९ हे उत्तर

## दशांशगुणाकार.

॥ गुण्य, गुणक मांडून, साध्या गुणाकारा प्रमाणें गुणाकार करावा; नंतर गुण्य आणि गुणक यांतील दशांश स्थळें मोडून, विलेक स्थळांवर गुणाकारांत उजवे कडून डावे कडे दशांश चिन्ह करावे. कदाचित् विलेक स्थळें गुणाकारांत न भरलील, तर मागे शून्ये देऊन पुरी करावी.

॥ या रीतीची सत्यता पुढील उदाहरणा पासून स्पष्ट होईल. १२ हे ३६१ या नी गुणायाचे आहेत व या सारख्या  $\frac{१२}{३६१}$  आणि  $\frac{३६१}{१२}$  यांचे बरोबर आहेत तर यांचा गुणाकार  $\frac{४३३२}{१०००००}$  आहे; परंतु पूर्वी सांगितले दशांश लिहिण्याचे रीती

(२५)

### उदाहरणें

(१) ३४५. ६३८५ हे गुण्य ९. ७१

या गुणकानें गुण

३४५. ६३८५  
९. ७१  
३४५ ६३८५  
२४१९४ ६९५  
३११०७४ ६५५  
३३५६ १४९८३५ गुणाकार.

(२) ००६५२ हे गुण्य ०६४२८

या गुणकानें गुण.

००६५२  
०६४२८  
५३१६  
१३०४  
३६२८  
३९१२  
०००४१९१०५६ गुणाकार.

### प्रथम संक्षेप.

गुणक एक अथवा कोणती ही अंक संख्या असून वरकांहीं शून्यें असतील, तर त्यानें गुणायाचा.

### रीति.

१ एकावर जीं शून्यें असतील तीं मोडून गुण्यांत तितकीं स्थळें दशांश चिन्ह पुढें (उजवेकडे) न्यावें; कदाचित् तितकीं अंक स्थळें न भरतील तर शून्यें देऊन पुरीं करावीं.

२ जेव्हां गुणक एकाहून वर कोणती दुसरी संख्या असून तिजवर शून्यें असतील तर तीं शून्यें मोडून, गुण्यांत तितकीं स्थळें दशांश चिन्ह पुढें नेऊन, नंतर त्यास शून्य रहित गुणकानें गुणावें.

### उदाहरणें.

(१) ३२५. ६३२३ हे गुण्य १००० या

गुणकानें गुण.

(२) ००६५ हे गुण्य १०००० या

गुणकानें गुण.

प्रमाणे ००३२२ हा आहे जीत दशांश स्थळें से दशांश स्थळां इत्यादी अथवा गुण्य गुणकांत जितकीं दशांश स्थळें आहेत तितकीं आहेत.

३२५. ६२. २३ गुण्य.	०० ६५
१००० गुणक	१०००००
३२५. ६३२. ३ गुणाकार	६५० गुणाकार.
(३) २१५. ६२४८ हे गुण्य १५०० या	(४) ६५. २१, ३२. ००५, ५३ यांस
गुणकानें गुण.	अनुक्रमें २१०, १६०००, ५३००० यांणीं
२१५. ६२४८	गुण.
१५	उ० १३६९४. १, ५१२०००, २८०९०
३२३४३७२० गुणाकार.	

### दुसरा संक्षेप.

गुणाकारांत हवी तेंवदीं दशांश स्थळें आणण्याचा.

### रीति.

गुणाकारांत दशांश स्थळें किती आणावयाचीं ती संख्या मनांत आणून गुण्यांत तितकीं दशांश स्थळें ठावे कडून सोजून शोबटील स्थळांसाठीं गुणकांतील पूर्णांकाचा एकचा अंक मांडावा. आणि वा + सह आढे की, आपल्यास नेमत्या दशांश स्थळां इतकीं गुणाकारांत दशांश स्थळें घेणे आढेव, तेव्हां शोबटील दशांश स्थळांचे जातीचा अंक कोणत्या अंकांने गुणिलें असतां उत्पन्न होतो हे पट्टा घेणे आहे. सत्यता. एकला एकने गुणिलें असतां गुणाकार एक, दहने गुणिलें असतां दहं, शतने गुणिलें असतां शत, दशांशाने गुणिलें असतां दशांश, शतांशाने गुणिलें असतां शतांश, इत्यादि येतो. सगळे एकला जाणा स्थानांचे गुणाबे, त्या त्या स्थानाचा गुणाकार येतो, तसेंच दहने स्थानाचा एकने गुणिलें असतां गुणाकार दहं, दहने गुणिलें असतां शत, शतने गुणिलें असतां सहस्र, दशांशाने गुणिलें असतां एक. शतांशाने गुणिलें असतां दशांश गुणाकार येतो. यावरून दहं वा स्थानाला जाणा स्थानाने गुणाबे त्या त्या स्थानाचा दसपट गुणाकार येतो, शतने गुणिलें असतां शत पट येतो इत्यादि. जसें एका गुणाकारांत चार दशांश स्थळें पाहिजेत तर शोबटील स्थळ दशांश सहस्र शानें आहे आणि आपल्यास दशांश सहस्र पयलेच गुणाकार घ्यावयाचा आहे संपूर्ण गुणक-अवा स्थितीने मांडावे की, मध्यम स्थानाचा गुणाकार दशांश सहस्र वा वेईल, या अकरितां वर लिहिल्या नियमांममाणे गुणकांतील पूर्णांकाचा एकचा अंक गु-

की पूर्णांक उज बेकडे उलटे लिहावे. आणि दशांशा त्या एक पासून डा  
बेकडे उलटे लिहावे, नंतर जा गुणकांकाने गुणायाचे त्याचे वरचे अंका  
पासून आरंभ करावा, आणि गुणाकार उजवे शीबटा पासून लिहावा. सो  
उर्या गुण्यांकानून एकजवळचा अंक गुणून हातचे घ्यावे. ते घेण्या-  
चा मार्ग, ५ पासून १४ पर्यंत हातचा एक, १५ पासून २४ पर्यंत दोन, इ-  
हातचे घ्यावे चात्र माणें सर्व रकमा गुणित्यावर मिळवणी करून (इ-  
डिले स्थळावर) उज बेकडून दशांश चिन्ह करावे.

### उदाहरणे.

(१) २१६-५३२=२ हे गुण्य ९२-३६ | (२) ०१६३=५ हे गुण्य १२-०५९ या  
या गुणकाने गुण. असे की, गुणाका- गुणकाने गुण. असे की, गुणाकारांत  
रांत दशांश स्थळें ३ होतील. दशांश स्थळें ६ होतील.

ण्यांतील दशासहस्रांशा खाली मांडावा; तसेंच दह लक्षांशा खाली, शतं दशलक्षां  
शा खाली इ. पूर्णांक मांडावे. दशांशाने सहस्रांशाला गुणिले असता गुणाकार दशा  
सहस्रांश वर लिहिल्या ममाणें येवी, संपूर्ण दशांश सहस्रांशा खाली, शतांश शतांशा खाली,  
सहस्रांश दशांशा खाली, दश सहस्रांश एकंश खाली इत्यादि दशांशाचे अंक मांडावे.  
लक्षांशाचा हातचा दशासहस्रांश आहे याज करिता गुणाकार करतवे वेळीं पुढी  
ल एक स्थानचा अंक गुणून त्याचा हातचा मात्र घेऊन तो दशासहस्रांशाचा गुणा-  
कारांत मिळवावा.

पुरा दशाक झाल्यावांचून हातचा येत नाही, या सुळे बाकी जाऊन नुक पडले ती  
विशेषन फडावी संपूर्ण अर्ध दशाक झाल्यावर पुरा दशाक धरावा. जसे पांच पासून  
न १४ पर्यंत हातचा १ पधरा पासून २४ पर्यंत २ इत्यादि.

गुणाकार याहून ही अधिक बराबर व्हावा अशी इच्छा असल्यास इडिले स्थ  
ळाचे पुढील स्थळा पासून हातचे घेतेवेळीं बाजूस दोन स्थळां धनचक्रण चिह्ने क  
रून बाकी मांडावी. जसे ५४ शी हातचे ५ धन ४, ३० शी हातचे ३ अण २, २१ शी  
हातचे २ धन १ आणि २० शी हातचे ३ अण २ अशा रीतीने मांडावे. नंतर सर्व धन  
धन चक्रण अण यांचा निरनिराळ्या बंरजा घेऊन मोठ्या बंरजेंतून लहान बंरीत  
वजा करावी. जर बाकी दशाक हून अधिक असेल तर त्याचे त्याचे चिन्हा ममाणें तितके  
दशाक गुणाकाराचे शीबटील स्थळांत मिळवावे अथवा वजा करावे.

२१६५३८२ गुण्य  
६३१९ गुणक

१९४८७९५४

४३३०६६

६४९६०

१२९९९

१९९९८०७३ गुणाकार

०१६३८५ गुण्य  
९५८३९ गुणक

१६३९

३९८

१३०

१

२१०६ गुणाकार

## दशांशभागाकार

रीति.

पूर्णांकप्रमाणें भाज्य भाजक मांडून, भागाकार करावा, आणि भागाकारांत उजवे कडून इतके स्थळांवर दशांश विंदू करावा की, भाजकापेक्षां भाज्यांत जितकीं दशांश स्थळे जास्त आहेत, कदाचित् भाजका पेक्षां भाज्यांत दशांश स्थळे कमी असतील तर तितकीं शून्ये भाज्यावर घेऊन, नंतर भागाकार करण्यास आरंभ करावा.

भागाकार केल्यावर कांही बाकी राहिल, तर भाज्यावर शून्ये घेऊन ती बाकीवर घेत जावी, या प्रमाणें इतका आहे तो पर्यंत करावे.

## उदाहरणें.

(१) २१२.५७३२ हे भाज्य ९.३१२ या भाजकाने भाग.

(२) ४१२.५७३२०० (४४.३०५५ भागाकार हें उत्तर

३७२४८

४००९३

३७२४८

२८४५२

२४९३६

५१६३३

४६५६०

५०९००

४६५६०

४८४० बाकी.



(२९)

(२) ५०-७२४० हे भाज्य ५२२५-२५ या भाजकाने भाग.

उत्तर-०४५३२८

### प्रथमसंक्षेप.

भाजक पूर्णांक असून त्याजवर कांही शून्ये आहेत.

रीति.

भाजका बरीक शून्ये मोजून कापून टाकावी; आणि तितकीं स्थळे दशांशा बिंदू भाज्यांत डावेकडे सारावे. स्थळे कमी आल्यास शून्ये देऊन पुरी करावी; नंतर त्यास शून्यरहित भाजकाने भागावे म्हणजे भागाकार झाला.

### उदाहरणे.

(१) २१६८-४५ हे भाज्य २५०० या भाजकाने भाग.

भाजकाने भाग.

२५) २१-६८५५० भागा.

भाग.

उत्तर-०३६८४२

### दुसरा संक्षेप.

भागाकारांत हवी तेवढी दशांशा स्थळे आणण्याचा

रीति.

इष्टिले दशांशा स्थळा पर्यंत भागाकार घेणे आहे तर भाज्य भाजक मनांत आणून, भागाकारांत पूर्णांक स्थळे किती येतील, तो उजवास्त करावा, नंतर जी पूर्णांक स्थळे येतील, त्यांतील मोठे स्थान वा अंका पासून भागाकारांत इष्टिले स्थानचे दोनहील दशांशा स्थळा पर्यंत तितकीं अंक स्थळे होतील तितकीं स्थळे भाज्यांत डावे कडील प्रथम अंका पासून उजवेकडे मोजून दोनहील अंकावर सुणा करावी; कदा

चित् भाज्याचा प्रथम अंक भाजकातील प्रथम अंकापेक्षा लहान असेल तर भाज्याक दुसरे स्थान नवे अंकापासून मोजून गुणा करावी. अथवा पूर्णांक स्थळे घेत नसतील तर दशांशाचा प्रथम भाग कोणते स्थाना लागतो ते पाहून तेथून इच्छिते दशांश स्थळाचे दोबरील स्थळा पर्यंत जितकी अंक स्थाने होतील तितकी वर सांगितल्या प्रमाणे भाज्यात मोजून गुणा करावी; आणि तितक्या अंक राहिलेस प्रथम भाग लागण्यास जितका भाजक योग्य आहे तितका ठेवून बाकी उजवे दोबदा कडील भाजकाक कापून टाकावे; नंतर घेतले भाजकाने घेतले भाज्यास भागावे आणि जी बाकी राहिल ती नवा भाज्य, नवे भाजक करिता पूर्व भाजकातील उजवे दोबदा कडील एक अंक कापवा तो नवा भाजक. भागाकार करत्ये वेळी कापले अंकाचा हातचा, दशांशगुणाकाराचे दुसरे संक्षेपांत सांगितल्या प्रमाणे, घेऊन मागील अंकाचा गुणाकारांत मिळवून तीरकम भाज्यातून वजा करावी; पुनः दुसरी बाकी नवा भाज्य आणि पूर्व भाजकाचा उजवे दोबदा कडील एक अंक कापून नवा भाजक या प्रमाणे दोबदा पर्यंत करावे. भागाकारात उजवे दोबदा कडून इच्छिते दशांश स्थळाची संख्या मोजून तितके स्थळांवर दशांश चिन्ह करावे.

+ भाजकातील एकेक अंक भागाकाराचे प्रतिस्थानी का पावण्याचे कारण कोणत्याही भागाकारात जी बाकी राहिले तिचे स्थान नवे अंकाचा जातीत आणण्या करिता दहांनी गुणाबेलागते ते न गुणितो देतास दहांनी भागिल्याने गुणाकार होतो जसे  $\frac{१०}{१०} = १$  यात अशास दहांनी गुणावयाचे आहेत  $\frac{१० \times १०}{१०} = १०$  याप्रमाणे भागाकाराचे प्रतिस्थानी बाकीत दहांनी गुणावयाचे स्थान कोणी भाजकास दहांनी भागिले. आता कोणत्याही संख्येला दहांनी भागणे अथवा त्या संख्येचा दोबरील एक अंक कापून वकणे या दोही कडून भागाकाराचे पूर्णांक एकच आहेत.

२ भागाकारांत पूर्णांक स्थळें किती येतील तो सुमार करून तीं व इच्छिलेलीं दशांश स्थळें मिळून किती स्थळें होतात, तितकीं डाबेकडील भाजक स्थळें ठेवून, बाकी कापून टाकावी, तो भाजक. नंतर या भाजकास जितका भाज्य योग्य असेल, तितका ठेवून बाकी अंक कापून टाकावे, घेतले भाजकाने भाज्य भागून बाकी राहील ती नवा भाज्य झाला. त्यास पूर्व भाजकांत उजवे दोबट्या एक अंक कापून बाकी राहील ती नवा भाजक, पुढे प्रथम रीतीत सांगितल्या प्रमाणें करावें.

जेव्हां भाजक स्थळीं अंकस्थानें उणी आहेत आणि इच्छिले दशांश स्थळां सुद्धा भागाकारांत अंक स्थळें अधिक आहेत, तेव्हां प्रथम सरळ भागाकार रीतीनें भागाकार करावा; आणि भागाकार स्थळां पेक्षां भाजकांत जितकीं स्थळें उणी असतील तितके अंक भागाकारांत घ्यावे, नंतर संक्षेप रीतीचा उपयोग करावा. जसें इच्छिले सुद्धा भागाकारांत स्थळें सहा आहेत आणि भाजकांत अंक चार आहेत, तर प्रथम सरळ भागाकार रीतीनें भागाकारांत दोन स्थळें घ्यावी, नंतर संक्षेप रीती चालवावी.

### उदाहरणें.

(१) ९३८५.००३ हे भाज्य ४३५.९७३२ या भाजकाने भाग. असें की, भागाकारांत दशांश स्थळें ५ होतील.

आतां या भागाकारांत पूर्णांक स्थळें दोन येतील तेव्हां त्यांतील मोठें स्थान दहं तेथ पाहून चार दशांश स्थळां पर्यंत सज्जने दहा सहस्रांदा पर्यंत स्थळें सहा होतील.

(३२)

४/३/५.१७३२) २३८५.७०३ (२१.५२८१

८७१९ ४६

१२२८

६६६ २४

८७३

४३ ५९७

३५६

२३० २७

३४८

२१ ७९९

८

१२२८

८

८ वाकी

(२) ३३५.३५२६ हे भाज्य ६२५.४५४५ या भाजकाने भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळे पांच होतील.

उत्तर, ५५६४५

(३) ००३५६७८ हे भाज्य ६२५.३९६५ या भाजकाने भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळे सहा होतील.

या भागाकारांत पूर्णांक स्थळे किती येतील याचा अजमास पाहता पूर्णांकाचे भाग न येऊन दशांशाचे चार भाग द्याचे येतात.

६२५.३२६५) ००३२५६७८ (०.००००५२

३१३  
१३  
१३

उत्तर. ००००५२

(४) ११६.३५७ हे भाज्य ४२६६५ या भाजकाने भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळे तीन होतील.

उत्तर २७२.७२२

**दशांश भाजणी.**

**प्रथम प्रकार.**

अवहारी अपूर्णाकास बराबर भावाचे दशांशाचे रूप द्यावयाचे

दशांश भागाकार रीति प्रमाणे अंशांस छेदनी भागावे. अंशाव  
रहणी तेवढी वस्तु ये व्यापी भागाकार येईल ते इच्छिते दशांश येतील

### उदाहरणें.

(१७) ङ यांस दशांशाच्चैरूपदे. | (१८) ह्र यांस दशांशाच्चैरूपदे.

८५००० २४५ हंउनर.

१२४.०००० इ. उत्तर.

(२) १५७६८ यांस दवांज रूपदे (२४) १६ यांस दवांज रूपदे

कुसुम १०६१६८

उत्तर-१४२८५, ७१४२८-५७१३०

४- जाचे उद्द अविभाज्य संख्या आहेत, अशा व्यवहारी अपूर्णाकास दशांश रूप द्यावयास इच्छिते आहे असें की, जाचे अंक बहुत होतील, त्याची रीति ही आहे.

उदाहरणें.

२९ हा व्यवहारी अपूर्णांक आहे यास दशांश रूप दे.

आतां बाकी एक-एक राही पर्यंत चालते भागाकारानें अंशांस भागून.

३६ = ०३४४८३६ हं प्र० स० यांन दोन्ही पेट्यांस ५ यांणी गुणून

$\frac{P}{P_0} = -2.95 \times \frac{h}{2\pi} \text{ ही किंमत प्रथम समीकरणात लिहून.}$

$\therefore = 0.3885 \times 10^6 \times \frac{1}{1000}$  हेतु स० यांन दोन्ही पेट्यां स० ध्याणी गुणून

$\frac{dy}{dx} = 206 = 165590 \frac{6}{29}$  हा किंमत दुसरे समीकरणात लिहून

$= 0.03880304506206096590 \frac{1}{\text{से}} \text{ या प्रमाणे पुढे इच्छा आहे पर्यंत करावे}$

या पासून आणखी कळेल की, या उदाहरणात दशांश २८ अंकांखेरीपर्यंत पुनरावृत्त होतात. सगळे सांगितलेले अपूर्णाकांचे केदस्थकांचे सरासरी एक अंक उणाईतके स्थळांनी पुनरावृत्त होतात.

જાન્વી છેલ્લે જાણીમાન્ય સંરચના આદેશ, અમે જયહારી અપૂર્ણીકે = ૧૪૨૨૫૭૧૪૩૦

कांत या सारिखेच कांहीं चमत्कारीक गुण आहेत, ते समजात. ३० = २०५७१४२०

प्रवधा करिता याजूवर दुसरे उदाहरण दाखविता जावे छेद  $\frac{3}{6} = . ४२५७१४२$

रमणी ७ ही अविभाज्य संख्या आहे; परंतु याचे आरंभ वेगळी

संख्या वासुन झाले आहेत; तथापि सहा सहा अंक सख्या- ७१४२५७१

या सहा आवतिसहा अंकस्थळाचे मूळ आवृत्तीत आहेत.



## दुसरा प्रकार.

हलके नावाचे पूर्णांक अथवा दशांश यांस भारी नावाचे दशांश

वाचें रूप दाखवाचा.

रीति. शेंबटील आति हलके जातीचे अंक, त्याचे वरचे एकांत किती आहेत त्यांणी आ हलके अंकांस दशांश भागाकाराप्रमाणें भागून, भागाकार त्याचे वरचे जातींत मिळवावा. पुनः त्याचे वरचे एका भारीति हे किती आहेत ते पाहून त्यांणी भागावें, याप्रमाणें शेंबट पर्यंत करावें.

## उदाहरणें.

(१) २ रुपये १२ आणे ५ पै यांस

रुपयाचें दशांश रूप दे.

१२) ५.०००००० से.

१६) १२.४१६६६६ आ.

उत्तर २.७७६०४१ रु.

(३) ३ विघे ५ पांड ३ कावया ४

हीत १ चीत यांस विघ्याचें दशांश रूप दे.

उत्तर. ३.२५९४३०५७

(२) ३ शेर वजनी आहेत यांस खं

डीचें दशांश रूप दे.

४०) ३.००० शेर.

२०) ०.७५०० मण

उत्तर. ०.००३७५ स्कडी

(४) ५३३२ इंच यांस मेलानें दशांश रूप दे.

उत्तर. ०.०८१५४ मेल.

## तिसरा प्रकार.

कोणते ही दशांशाचा भाव त्याचे हलके नावांत काढावयाचा.

रीति.

जा जातीचे दशांश सांगितले असतील, त्या जातीचे एकांत त्याचे रसा लखे हलके किती आहेत त्यांणी गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह करावें; नंतर जे दशांश राहतील त्यांस त्या जातीचे एकांत त्याचे रसालाखे जखम

## उदाहरणं.

(२) - ३६८७९ मेलाने यांचा भाव काय आहे?

• ३६८७९ ये.

२०९५०३२ फ०  
४०

१८.०१२८० पी०  
११

2) 98050

१०७०५० या.

29920

2. 42880 2

१०३२२० बा०

उ. भे. क. पो. भा. कु. इं. वा.  
१२३४५६७८९१०१११२१३१४१५१६१७१८१९२०२१२२२३२४२५२६२७२८२९३०३१३२३३३४३५३६३७३८३९४०४१४२४३४४४५४६४७४८४९५०५१५२५३५४५५५६५७५८५९६०६१६२६३६४६५६६६७६८६९७०७१७२७३७४७५७६७७७८७९८०८१८२८३८४८५८६८७८८८९९०९१९२९३९४९५९६९७९८९९

दशांशत्रैराशिकवपंचरा-  
शिक.

दशांशत्रैराशिक व पंचराशिकान्वरीति पूर्णांक त्रैराशिक व पंचराशिक यान्वरीति सांगितली आहे, त्याच मार्गेच आहे, परंतु त्यात भेद इतकाच आहे की, पदे सरूप करणे, शुष्काकार व भागाकार करणे ते

दशांशरीतीने करावे.

### उदाहरणे.

(१) एक मण कापसाचे  $\frac{1}{2}$  यास एकरुपयाचे  $\frac{1}{2}$  पडतान, तर एक मण कापसाचे  $\frac{1}{3}$  यास काय पडेल?

$$\frac{1}{2} = २५, \frac{1}{3} = ६२५, \frac{1}{३३} = १५६२५$$

$$\begin{array}{r} \text{म०} \quad \text{म०} \quad \text{रु०} \quad \text{रु०} \quad \text{आ०} \quad \text{पे०} \\ ६२५ : १५६२५ :: ६२५ :: ० \dots २ \dots ७.२५७० \\ \hline ६२५ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ६२५ \times ०९७६५६२५ \\ \hline १६२५७६०४६५६५० \\ \hline १६२५ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} २६०४९६७४५६५६५ \text{ आ०} \\ \hline १२ \end{array}$$

$$७.२५०००९४७२ \text{ पे०}$$

(२)  $\frac{1}{५}$  रु० खंडीस जर १२२ रुपये २ आणे पडतान तर  $\frac{१}{३३}$  खंडीस काय पडेल?

$$\begin{array}{r} \text{रु०} \quad \text{आ०} \quad \text{पे०} \\ \text{उत्तर } ८२ \dots १३ \dots ३.२७७५ \end{array}$$

### द्वादशांशगुणाकार.

व्याख्या.

(१) द्वादशांश गुणाकार म्हणून एक रीति आहे, जीणे करून विलोकीक आपआपली कामे मोजितात.

(२) या रीतीत मुख्यत्वे करून ते मोठे मान असेल, त्याचे खालचे प्रत्येक हलके जातीतील अथवा सारखे असले पाहिजेत. जसे फुटीचे इंच १२ आणि इंचाचे प्रती इंच १२ या प्रमाणे.

(३) यांत फूट, इंच आणि प्रती इंच हींच माने प्रायः कामांत घेतात.

त फुटी फुटी चा गुणाकार फुटी. फुटी इंचा चा गुणाकार इंच आणि इंचा इंचा चा गुणाकार प्रति इंच होतो.

(४) फुटीला एक वेळां फुटीने गुणिलें असतां चौरस फुटी आणि दोन वेळां गुणिलें असतां त्या गुणाकारास घन फुटी म्हणावे. तसेंच लांबी, रुंदीचे गुणाकारास क्षेत्रफळ आणि लांबी, रुंदी व उंची अथवा जाडी यांचे गुणाकारास घनफळ म्हणावे.

### रीति.

गुण्य आणि गुणक फुटी खालीं फुटी, इंचा खालीं इंच या प्रमाणें एका खालीं एक येतील, असे लिहावे, नंतर गुण्यांतील हलके नावाचे पदा पासून आरंभ करून त्यांचे प्रत्येक पद गुणकाचे फूट स्थळीं चें अंकाने गुणाचे आणि प्रत्येक पदाचा गुणाकार त्याचे त्याचे खाली लिहावा; परंतु इंच स्थळींचा गुणाकार बारांपेक्षा अधिक असल्यास बारांनी भागून बाकी तेथें लिहावी, आणि भागाकार येईल तो हातचा अंक फूट स्थळींचा गुणाकारांत मिळवून लिहावा.

अशा रीतीने गुण्याची वेगळालीं पदे गुणकाचे इंच स्थळींचे अंकाने आणि त्यावरील भागांनी प्रत्येकी गुणून गुणाकार बारांपेक्षा अधिक आल्यास पूर्वे प्रमाणें करून गुणाकार उजवेकडे एकेक स्थळ सारून मांडावे; नंतर विविध मिळवणी प्रमाणें त्यांची बेरीज घ्यावी.

या रीतीने एकर, गुंठे, गज, तसू यांचा ही गुणाकार होतो यांत एकराचे गुंठे ४० आणि गुंट्याचे प्रतिगुंठे ४० तसें गजाचे तसू २४ आणि तसूचे प्रति तसू २५ धरावे.

## उदाहरणें.

(१) ३० फुटी ३३ इंच हे गुण्य यांस (२) २ एकर १२ गुंठे यांस ५ एकर

११ फुटी ६३ इंच यांणीं गुण.

२० गुंठे यांणीं गुण.

फु० इ० म० इ०

ए० गु०

३० .. ३ .. ६

२ .. १२

११ .. ६ .. ६

५ .. २०

४१० .. २ .. ६

११ .. २०

१० .. ७ .. ९

१ .. ६

१ .. ६ .. ७ .. ९

१२ .. २६ हैं उत्तर.

४३० .. ४ .. १० ३ उत्तर

(३) २ गज १० तसू यांस ३ गज-

(४) एक संगमरवरी दगड आहे त्या

४ तसू यांणीं गुण.

ची लांबी ४ फू० ६ इ० रुंदी ५ फूट

ग. त.

६ इ० आणि उंची ६ फू० १ इंच आहे

उत्तर ८ .. १७

त्याचे घन कळकाय

उत्तर १५० .. ६ .. १ घन फूट

## घातकर्म.

कोणता ही अंक मूळ कल्पून त्याणि तीस कितीक वेळां गुणून याद  
विला जो गुणाकार त्यास घात म्हणावे, आणि हा घात करण्याचेरीती  
स घातकर्म म्हणावे. जसे

५ = ५ हे मूळ अ. पांचांचा प्रथम घात आहे.

५ x ५ = २५ हा पांचांचा द्विघात अथवा वर्ग आहे

५ x ५ x ५ = १२५ हा पांचांचा त्रिघात अथवा घन आहे.

या मुदील कोटकाव नऊ अंकांचे नवा पर्यंत घात लिहिले आहेत.



(३९)

## घातकोष्टक.

म०	वर्ग	घन	चतु०	पंच०	षड्०	सप्त०	अष्ट०	नवघात.
१	१	१	१	१	१	१	१	१
२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२
३	९	२७	८१	२४३	७२९	२१८७	६५६१	१९६८३
४	१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	१६३८४	६५५३६	२६२१४४
५	२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	७८१२५	३९०६२५	१९५३१२५
६	३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	२७९९३६	१६७७६१६	१००७७६९६
७	४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६५९	८२३५४३	५७६४८१	४०३५३६०७
८	६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	२०९७१५२	१६७७७३१६	१३४२१७७२८
९	८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३३४४१	४७८२९६९	४३०४६७२१	३८७४२०४८९

घात सब विणारा जो अंक त्यास घात प्रकाशक म्हणावे मूळस वाढ विण्या करितां जितके वेळां गुणावे लागते त्या पेक्षां एकाधिक घात प्रकाशक असतो. हा घात प्रकाशक मूळ संख्येचे वर उजवे आंगास मूळ अंका पेक्षां बारीक लिहावा. जसें  $५^३ = २५$  हा द्विघात अथवा वर्ग दाखवितो.  $५^४ = ६२५$  हा चतुर्घात दाखवितो.

सर्व पदांचे दोन किंवा अधिक घात परस्पर गुणा यांचे आहें, तेव्हां त्या घात प्रकाशकाची बेरीज घेऊन, ती मूळ पदास प्रकाशक करावी.

टीप. सम अपूर्णाका शिवाय बाकी सर्व पूर्णांक अथवा अपूर्णाका यांचे घात उत्तरोत्तर अधिक भावांचे होतात.

+ सर्व मूळ जे वरीवर.

(१) २१६३.४३८ यांचा वर्ग काय होतो?

उत्तर. ४६८०.४६३.९७९८४४

(२) ००२९ यांचा पंच घात काय होतो?

उत्तर. ००००००००२०५११४९

(३) हे यांचा घन काय होतो?

१२५  
उत्तर ३४३

## मूळकर्म.

मूळकर्म स्रणजे कोणते ही घातांचे मूळ काढण्याची रीति. हे घात कर्माचा उलट आहे.

कोणत्या ही घातांचे मूळ ती संख्या आहे की, जिचा नितक घात त्या सांगितले घाता बरोबर आहे. जसे ५ हे २५ यांचे वर्गमूळ, आणि ४ हे ६४ यांचे घनमूळ  $५^३ = १२५$  आणि  $४^३ = ६४$  इत्यादि.

कोणते ही संख्येचा घात बरोबर होतो, परंतु किती एक संख्या अशा आहेत की, त्यांचे मूळ बरोबर निघत नाही. दशांशांचे सहा घाते जवळ जवळ मान निघते.

जे मूळ पूर्ण निघत नाही, त्यास खंडमूळ अथवा करणी स्रणतात. आणि जे बरोबर निघते त्यास अखंड स्रणतात, जसे ५ यांचे वर्गमूळ करणी आहे, आणि ९ यांचे वर्गमूळ अखंड आहे.

## वर्गमूळ

वर्गमूळ स्रणजे सांगितलेली संख्या वर्ग मानून त्यापासून मूळ

काढण्याची रीति आहे.

रीति.

सांगितले वर्गाकांत दोन दोन अंकांचे भाग करावे, प्रथम पूर्णांकांत एकांचे स्थळांतील अंकावर (१) असें भाग चिन्ह करावे. पुढें दशांतचे स्थानांतील अंकावर याप्रमाणे एकेक स्थान सोडून, भाग चिन्ह करावीं. तसें दशांशांत प्रथम दशांशाचे अंकावर भाग चिन्ह करावे. तें धून पुढें एकेक स्थान सोडून याप्रमाणे भाग चिन्ह करावीं. कदाचित् दशांशाचे बीवटी अंक कमी असल्यास शून्य देऊन, भाग चिन्ह करावे.

उावे कडील प्रथम भागांत अति मोठा वर्ग कोणता आहे, तें शोधून, त्याचें मूळ उजवें कडे भागाकारस्थळी मांडावें आणि त्याचा वर्ग प्रथम भागांतून वजा करून, बाकी वर वरचा एक भाग घ्यावा. ह्यानचा भाज्य झाला, भाजका करितां पूर्व मूळ दुपट करून, भाजकस्थळी लिहावें. आ-

+ कोणत्याही संख्येत एक अंकाचा वर्ग दोन अंकांनून जास्त होत नाही, आणि दोन अंकांचा वर्ग तीन अंकांनून कमी आणि चार अंकांनून जास्त होत नाही, तीन अंकांचा वर्ग पांच अंकांनून कमी आणि सहा अंकांनून जास्त होत नाही. याप्रमाणे पुढें तसें १, ९, १०, ९९ यांचे वर्ग १, ८१, १००, ९८०० हे आहेत. अथवा बीजगणने (१०अ+५) ही एक दोन अंकांची राखी आहे, तीत व एक आणि अदह आहेत तर हिचा वर्ग १०० अ + २०अव + २५ यांत वी एकचे स्थानचा अंक २० अव दहचे स्थानचे अंक आणि १०० अ दशांचे स्थानचे अंक स्पष्ट जे अजर इतकाल ह्यान असेल की, त्याचा वर्ग दशा काढून जास्त होत नाही तर मात्र १०० अ यांची किंमत जोकडे व स्पष्ट जे तीन अंकांची संख्या होईल, परंतु अचा वर्ग दशा काढून जास्त होत असेल तर १०० अ हे सहस्र स्पष्ट जे चार अ अंकांची संख्या होईल. याज करितां मुळांत इतकी स्थळे होतील की, सांगितले संख्येत जितकी भाग स्थळे होतील आहेत.

\* या रीतीची सत्यता बीजगणने लिहितां. (अ+५) = अ + २अव + २५ = अ + २अ + (२अ+५) \* व हा वर्ग आहे यात दिसते की, मूळाचें प्रथम पद अ आणि दुसरे पद व आहे, आणि प्रथम भाजक अ आणि दुसरा भाजक २अ+५ आहे, स्पष्ट जे मूळांतील प्रथम पदाची दुपट करून दुसरे अवस्थे पदानें बाढविली, याज करितां

णि भाज्याचे उजवे शेंवटाकडील एक अंक सोडून, राहिले भाज्यांत हानवा  
भाजक किती वेळा जातो ते शोधून, तो वेळांक भागाकार स्पष्टीव भाजक  
वर व त्या खाली लिहावा. नंतर त्या वेळांकाने वाढविल्या सहा भाजक  
गुणून, तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा आणि बाकीवर पुनः वरचा  
एक भाग घ्यावा हानवा भाज्य झाला याज करिता पूर्व भाज्यांका खाली  
जो वेळांक मांडिला आहे, तो त्यांत मिळवावा हानवा भाजक, नंतर पु  
र्व प्रमाणे शोधून पर्यंत करावे.

सांगितले सरखेतील सर्व भाग खाली आणिल्या वर शेंवटी पूर्णांका  
नी किंवा दशांशांनी बाकी राहिल्यास ब्रह्मा आहे तो पर्यंत प्रति बाकी  
वर दोन दोन वारून देऊन दशांशांत वाढवितां येईल. परंतु तीं चरम  
वर्गांकावर प्रथम येऊन, नंतर बाकीवर घेत जावी.

### उदाहरणें.

(१) २५६-२५३२७ यांचे वर्गमू

(२) १ याचे वर्गमूळकाढ

ककाढ

२५६-२५३२७८१६००७

उत्तर-२५६

२६ ३५६

(३) ७२३-५२६२ यांचे वर्गमूळकाढ

३३००७ २५३२७०

उत्तर २६-०९०४

मूळकाढण्याची रीत या प्रमाणे आहे.

प्रथम भाजक अ, अ+२अब+ब (अ+ब हे मूळ

दुसरा भाजक २अ+ब

२अब+ब

उत्तर दुसरे मूळकाढ अवक तीनप

२अब+ब

दे आहेत, जसे

(अ+ब+क) = अ+२अब+ब

२अक+२बक+क = अ+अ+ (२अ+ब) ब+ (२अ+२ब+क) × अ हा तीन पदांचा  
वर्ग आहे यात मूळाचे प्रथम पद अ दुसरे पर्यंत आणि तिसरे पद क आहे आणि  
प्रथम भाजक अ दुसरा भाजक २अ+ब आणि तिसरा भाजक २अ+२ब+क

(४३)

३२००७  
३२००७  
३२००४

२५३२७०  
२२२४४९  
२२२२२१

(४) ३ आणे ७ पे यांचे वर्गमूळ का

ढा

आपे

उत्तर ४७३२४२ = ७.२.२६२४

### व्यवहारी अपूर्णाकाचे वर्गमूळ

**प्रथमरीति.** अंशाचे वर्गमूळ अंशस्थळी आणि छेदाचे वर्गमूळ छेदस्थळी ठेवून, नंतर दशांश भागाकार रीतीने प्रमाणे भागाकार करावा; त्याप्रमाणे वर्गमूळ झाले.

#### उदाहरणे.

(१)  $\frac{३५}{१००}$  यांचे वर्गमूळ काढ.

$\frac{३५}{१००} = \frac{५}{१०} = \frac{१}{२}$  (३५)

$= \frac{५}{२} = २.५५५५५$  इ. हे उत्तर.

(२)  $\frac{६२}{१००}$  यांचे वर्गमूळ काढ.

उत्तर. ७.६१५७६

**दुसरी रीति.** अंशछेदाचा प्रथम दशांश भागाकार रीतीने भागाकार करून, नंतर त्याचे वर्गमूळ काढावे.

#### उदाहरणे.

(१)  $\frac{३५}{१००}$  यांचे वर्गमूळ काढ.

उत्तर १.८

(२)  $\frac{६२}{१००}$  यांचे वर्गमूळ काढ.

उत्तर. २६११५७

**तिसरी रीति.** अंश आणि छेद परस्पर गुणून गुणाकाराचे वर्गमूळ काढून, ते मूळ अपूर्णाकाचे अंश ठिकाणी ठेवावे किंवा छेद ठिकाणी ठेवावे. त्याप्रमाणे वर्गमूळ झाले.

आहे सात वाढून २४ काढने की प्रत्येक भागाक मूळना १० पूर्वाची दुप्पट मजकूर  
ववे पदाने वाढ चिन्ही पांचे वरा वरा आते  
३५ यांचे वर्गमूळ काढणे आहे, असे मनांत आण आतां ३५ वा ३५०० की, कोण  
त्याही अपूर्णाकाचे अंशछेदां म मते की साधारण गुणक लाविला, तर किंमत



### उदाहरणें.

$\frac{१२}{११}$  आणि  $\frac{११}{१२}$  यांची वर्गमूळें काढ.

आनी अंश छेदांचे गुणाकार ६०, ९९, ३६ हे आहेत. संपूर्ण

$$\text{उत्तरें} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{१४०}}{११} = \frac{०.७४५९६६}{११} = .०६५५९६२ = \frac{५}{१६०} \\ \frac{\sqrt{१९९}}{११} = \frac{१४.९४९०७४}{११} = .१०४५३४ = \frac{१०४५३४}{१०००००} \\ \frac{\sqrt{१३६}}{१२} = .५ = \frac{५}{१०} \end{array} \right.$$

### घनमूळ.

घनमूळ संपूर्ण जे कोणते ही घनाचे मूळ काढणें.

#### प्रथमरीति.

सांगितले घनाकांचे वर्गमूळांत सांगितले रीतीने भाग करावे. यांत इतकाच फेर की, वर्गमूळासाठी दोन दोन अंकांचे भाग करावयाचे ते. घनमूळासाठी तीन तीन अंकांचे करावे. नंतर डावे कडील प्रथ

वदलत नाही. याकडितां  $\frac{अ}{ब} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{ब} = \frac{अब}{बब}$  अथवा  $\frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{अ} = \frac{अ}{अब}$  आतां  $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{\sqrt{ब}}$  यांत अंश छेदांचा गुणाकाराचे वर्गमूळ अंश दिकाणी ठेविल्याने अपूर्णाकाचे वर्गमूळ निघते, हे सिद्ध होते. तसे  $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{\sqrt{ब}}$  यांत गुणाकाराचे वर्गमूळ छेद दिकाणी ठेविल्याने अपूर्णाकाचे वर्गमूळ निघते हे सिद्ध होते.

+ सांगितली संख्या तीन तीन अंकांस्थानी भाग याचे कारण पुढे सांगलों या वस्तु लक्षांत येईल. जसे (१०० अ. व) ही दोन अंकांची एक राशी आहे. तर हिचा घन (१०० अ. व) = १००० अ. व १०० अ. व १०० अ. व यांत व हे एक स्थानचे अंक, १०० अ. व हे दुसरे स्थानचे अंक या प्रमाणें १००० अ. हे सहा स्थानचे अंक आहेत. आतां एक अंकाचा घन १, २ अ. ३ अंकांचा ही तो वाकून १००० अ.

म भागांत अति मोठा घन कोण ते संख्येचा आहे ते शोधून, ती संख्या  
भागाकार स्थळी लिहून, तिचा घन मध्यम भागांतून वजा करावा. आ-  
णि बाकी वर वरचा एक भाग व्यावा, तो नवा भाज्य झाला. नवे भाज-  
का करितां वर लिहिले मूळाचे वर्गाची लिपट करून लिहावी. आणि  
त्याचे खाली मूळाची लिपट करून, एक अंक पुढे जाई अशी लिहा-  
वी. त्यांची वेरीज नवा भाजक होईल. नंतर भाज्यांतील एक अंक सो-  
डून, बाकींतून हा भाजक किती वेळां जाईल, तो अंक भागाकार स्थळीं  
पूर्व अंकांचे उजवे कडे लिहावा. भागाकार स्थळीं दोन अंक झाले-  
ल्यात पूर्वीचे अंकांस (अ) आणि नवे अंकांस (ई) असें नाव द्यावे.

हे सहस्र, द्वासहस्र, अथवा लक्ष होतील. याज करितां दोन अंकांचा घन ४, ९,  
अथवा ६ स्थाने पर्यंत होईल, आणि तीन स्थानांचा घन सात पासून नऊ स्थाने  
पर्यंत होईल. तेव्हां जर एक घनांकांतील पूर्णांकाचा डावे कडोळ मध्यम भागक  
धीं १, २, अथवा ३ अंकांचा होईल. बाकी भाग तीन तीन अंकांचे, याप्रमाणे च-  
तुर्घात मूळांत चार चार अंकांचे, पंचघात मूळांत पांच पांच अंकांचे इत्यादि  
भाग होतील.

वरील रीतीची सत्यता बीजरूपाने लिहितां:  $(अ + ब) = अ + ३अब + ३अब^२ + ब^३$   
+  $३अ^२ब + ३अब^२ + ब^३$  हा घन आहे यांत दिसते की, मूळचे  
मध्यम पद अ आणि दुसरे पद ब मध्यम भाजक अ आणि दुसरा भाजक (३अ +  
३अब + ब) म्हणजे मूळांतील मध्यम पदाचे वर्गाची लिपट अधिक मध्यम प-  
दाची लिपट गुणिली दुसरे पदाने अधिक दुसरे पदाचा वर्ग. आतां वर्गमूळ  
काढण्याचा रीति प्रमाणे.

मध्यम भाजक (अ)  $अ + ३अब + ३अब^२ + ब^३$  (अ + ब हे मूळ.)

दुसरा भाजक.  $३अ + ३अब + ब$

$३अब + ३अब^२ + ब^३$   
 $३अब + ३अब^२ + ब^३$

पुनः दुसरे मूळ जात अ, ब, क हीं तीन पद आहेत जसे  $(अ + ब + क) = अ + ३अब + ३अब^२ + ब^३ + ३अक + ३अकब + ३अक^२ + ३अबक + ३अबक^२ + ३अक^२ + ३अब^२ + ३अब^२ + ब^३$

उदाहरणें:

(१) १५८४-३२२ याचें घनमूळ काढा (२) १७१४८३-१०५५

$2 \times 3 = 6$ $3 \times 2 = 6$ म. भा. १२६	$2 \times 3 = 6$ $3 \times 2 = 6$ १५८४ नवाभाज्य	नमूळकाढ
$3 \times 3 \times 1 = 9$ $3 \times 3 \times 1 = 9$ $9 = 9$	$3 \times 3 \times 1 = 9$ $3 \times 3 \times 1 = 9$ $9 = 9$	उत्तर. ८२९ (३) १८६ याचे घनमूळकाढ
$3 \times 3 = 9$ $3 \times 3 = 9$ नवाभा. १२९३	$3 \times 3 = 9$ $3 \times 3 = 9$ ३२३३८२ नवाभाज्य	उत्तर १. ३७९ (४) ८८ याचे घनमूळकाढ.
$3 \times 3 \times 3 = २७$ $३ \times ३ \times ३ = २७$ $२७ = २७$	$३ \times ३ \times ३ = २७$ $३ \times ३ \times ३ = २७$ $२७ = २७$	उत्तर. ९२८३१७८ (५) १५१५ याचे घनमूळकाढ.
$२६७१२ =$ शोधक.	$५६२५४$ वाकी.	उत्तर. ३१.७५५

द्विसप्तति

दुसरा विधि :-  
 $(3(अ+ब) + 3(अ+ब) \times क + क)$  क द्वारा निपटारा पतन आहे.  
 जात मुलाचे मध्यम पद दुसरे पद व आणि तिसरे पद क मध्यम पद क जे  
 दुसरा  $(3(अ+ब) + 3(अ+ब) \times क + क)$  आणि तिसरा  $(3(अ+ब) + 3(अ+ब) \times क + क)$   
 आहे.

सुमाराने अथवा कोटकापासून सांगितले घनाचे अति संनिध  
कमी किंवा अधिक अरबं घन घ्यावा, त्याचें नाव (अ), सांगितले  
घनाचें नाव (प) घेतले घनाचें मूळ (र) आणि सांगितले घनाचें  
इच्छितें मूळ (ल) कल्पावें. नंतर त्याची लिहिल्या प्रमाणें त्रैरा  
शिकानें मूळ काढावें.  $p + 2a : r :: a + 2p : l$  अथवा  $p + 2a : r :: p + 2a : l$   
 $r : p :: a : l$

अशा रीतीने उत्पन्न केले मूळाचा घन करून, तो घेतला घन अ-  
से मातून, वर लिहिल्या प्रमाणें तपशील करावा, स्वणजे अति संनिध  
दुसरे मूळ निघेल या प्रमाणें पुनः पुन्हा तपशील केल्याने फारच अ-  
वळ मूळ निघेल.

### उदाहरण.

६५८.६२७ यांचे घन मूळ काढ.

यांत  $a = ६५८$ ,  $p = ६५८.६२७$ ,  $r = ८.६९७७$  वर लिहिल्या प्र-  
माणें तपशील करून

$१९७४.६२७ : ८.६९७७ :: १९७५.२५४ :: ८.७००५$  हे उत्तर

### कोणतेही मूळ.

प्रथमरीतिः चतुर्धात मूळ काढणें असल्यास चार चार अंकांचे  
भाग करावे. पंचधात मूळ काढणें असल्यास पांच पांच अंकांचे क-  
रावे, या प्रमाणें पुढे ही.

प्रथम भागातून सांगितले घाताचें विवक्षित मूळ काढून, तें आ-  
गाकार स्वकी लिहावें त्याचें नाव (अ) नंतर अचा दुसऱ्या घात प्रथम



भाजकून बजा करून बाकी वर वरचा एक भाग घ्यावा. हानवा भाज्य  
झाला नवें भाजका करितां अन्ना एकोन घात गुणिता घात प्रकाश  
वानें ही प्रथम श्रेणी, नंतर वर लिहिले घात प्रकाशकांत एक उणाव  
चा घात गुणिता वरील श्रेणीतील घात प्रकाशक आणि वेळाम  
काशक यांचे गुणाकाराला भागिलें श्रेणीचे संख्येने ह्मणजे दुस  
रे श्रेणी करितां दोहोंनीं तिसरे श्रेणी करितां तिहीनीं इत्यादि संख्ये  
नें भागून भागाकार येईल ती दुसरी श्रेणी, पूर्व श्रेणीचे सवली लि  
हावी. आ प्रमाणें सर्व श्रेण्या तयार कराव्या. अशा कीं, शीवटील श्रेणींत  
घात प्रकाशक एक होईल. नंतर श्रेणीचीं पदे गुणून गुणाकार एकेक  
स्थळ पुढें जात असे मांडावे, मग सर्व गुणाकारांनी बेरीज घ्यावी. शी-  
भाजक झाला. नंतर भाज्यांतील शीवटचा एक अंक नाही, असें मनां  
त आणून जो भागला गेल ती भागाकार स्थळी पूर्व भागाकारावर  
मांडावा त्याचें नाव (ई). वर भाजका करितां तयार केले श्रेण्यास  
अनुक्रमें ई, ई, ई, इत्यादि यांणीं गुणावें, आणि जितके घातमूळ  
काढावयाचें तितका ईंचा घात शीवटी मांडावा. नंतर हे सर्व गुणाकार  
वर लिहिल्या प्रमाणें एकेक अंक पुढें जातील, असे लिहून बेरीज घ्या  
वी. आणि ती भाज्यांमून बजा करून बाकी काढावी. आणि ती वर वर  
चा एक भाग घ्यावा तो नवा भाज्य. भाजका करितां भागाकार स्थळीं  
जे अंक असतील, त्यांचें नाव अ ठेवून पूर्व प्रमाणें शीवट पर्यंत करावें.

### उदाहरणें.

(१) ३०९.६५०४ यांचें चतुर्वी । (२) १०१०.५ यांचें घनमूळ का  
तमूळ काढ.



$४ \times ४ = १६$	$२०१.६५८४ (४.४ व.मू.)$	उत्तर. ११.९६
$४ \times ६ = २४$	$२५६$	
$४ \times ४ = १६$		
भासक. २६९७६	$११३६५.८४ न. भाज्य$	
	$१९८०.९६$	
$४^१ \times ४ \times ४ = १२८$	$१९८४८८ वाकी.$	
$४^१ \times ६ \times ४^२ = १५३६$		
$४ \times ४ \times ४^२ = १०२४$		
$४^३ = ६४$		
	१९८०९६ शोधक.	

### दुसरीरीति.

(प) सांगितला घात (न) सांगितले संख्येचे वर्गादि मूळ प्रकाशकचि  
ह, (अ) अतिसंनिध घेतला घात (र) घेतले घाताचे मूळ (उ) इच्छितें  
मूळ, असें मानून खाली लिहिल्या प्रमाणे त्रैराशिकानें मूळ काढावें.  
 $(न+१)अ+(न-१)प : र :: (न+१)प+(न-१)अ : उ$  अथ  
वा  $(न+१)\frac{१}{२}अ+(न-१)\frac{१}{२}प : र :: प+अ : र+उ$ .

### उदाहरणें.

(१) २. ६११७७ यांचें पंचघातमूळ काढ.

$प = २.६११७७$ ,  $न = ५$ ,  $अ = २.४८०३२$ ,  $र = १.२$

$२५.३७७ : १.२ :: २५.६२३९ : १.२५०$  पंचघातमूळ हे उत्तर.

(२) २१०३५.८ यांचें षड्घातमूळ काढ.

उत्तर, ३५.३५४०३७

(५०)

वर्ग, वन, आशिमूळ.

संख्या	वर्ग	वन.	वर्गमूळ	वनमूळ
१	१	१	१.००००००००	१.००००००
२	४	८	१.४१४२१३६	१.२५९९२१
३	९	२७	१.७३२०५०८	१.४६४२५०
४	१६	६४	२.००००००००	१.५८०४०१
५	२५	१२५	२.१३६०६८०	१.७०९९७६
६	३६	२१६	२.४४९४८९७	१.८१७१२१
७	४९	३४३	२.६४५७५१३	१.९१२९३३
८	६४	५१२	२.८३८४२७१	२.००००००
९	८१	७२९	३.००००००००	२.०८००८४
१०	१००	१०००	३.१६२२७७७	२.१५४४३५
११	१२१	१३३१	३.३१६६२४८	२.२३३९८०
१२	१४४	१७२८	३.४६४१०१६	२.२८९४२८
१३	१६९	२१९७	३.६०५१५१३	२.३५१३३५
१४	१९६	२७४४	३.७४१६५७४	२.४१०१४२
१५	२२५	३३७५	३.८७२९८३३	२.४६६२१२
१६	२५६	४०९६	४.००००००००	२.५१९८४२
१७	२८९	४९१३	४.१३३१०५६	२.५७१२८२
१८	३२४	५८३२	४.२४२६४०७	२.६२०७४१
१९	३६१	६८५९	४.३५८८९८९	२.६६८४०२
२०	४००	८०००	४.४७३१३६०	२.७१४४१८
२१	४४१	९२८१	४.५८२५७५७	२.७५४९३३
२२	४८४	१०६४८	४.६९०४१५८	२.८०२१३९
२३	५२९	१११६७	४.७९५८३३५	२.८४३८६७
२४	५७६	१३८२४	४.८९८९७९५	२.८८४४९९
२५	६२५	१५६९५	५.००००००००	२.९२४०१८

(५१)

## वर्ग, घन आणि मूळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
२६	६७६	१७५७६	५.०९९०१९५	३.९६२४९६
२७	७२९	१९६८३	५.१९६१५२४	३.००००००
२८	७८४	२१९५२	५.२९१५०९६	३.०३६५८९
२९	८४१	२४३८९	५.३८५१६४८	३.०७२३१७
३०	९००	२७०००	५.४७७२२५६	३.१०७२३२
३१	९६१	२९७९१	५.५६७७६४४	३.१४१३०१
३२	१०२४	३२७६८	५.६५६८५४३	३.१७४८०२
३३	१०८९	३५९३७	५.७४४४५६२६	३.२०७५३४
३४	११५६	३९१०४	५.८३०९५१९	३.२३९६१२
३५	१२२५	४२८७५	५.९१६०७९८	३.२७१०६६
३६	१२९६	४६६५६	६.००००००००	३.३०१९२७
३७	१३७९	५०६५३	६.०८९७६९५	३.३३२९२२
३८	१४४४	५४८७२	६.१६४४४४०	३.३६१९७५
३९	१५२१	५९३१९	६.२४४९९००	३.३९१२११
४०	१६००	६४०००	६.३२४५५५३	३.४१९९७२
४१	१६८१	६८९२१	६.४०३१२४३	३.४४८२१७
४२	१७६४	७४०८०	६.४८०७५०७	३.४७६०२७
४३	१८४९	७९५७४	६.५५४४३८५	३.५०३३९८
४४	१९३६	८५१८४	६.६३३३५९६	३.५३०३४८
४५	२०२५	९११२५	६.७०८२०३९	३.५५६८९३
४६	२११६	९७३३६	६.७८२३३००	३.५८३०४८
४७	२२०९	१०३८२३	६.८५५६५४६	३.६०८०२६
४८	२३०४	११०५९२	६.९२८२०३२	३.६३३९४१
४९	२४०१	११७६४९	७.०००००००	३.६५९९०६
५०	२५००	१२५०००	७.०७१०६७०	३.६८५०३३

(५२)

## वर्ग, घन आणि मुळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमुळ	घनमुळ
५१	२६०१	१३२६५१	७.१४१४२८४	३.७०८४३०
५२	२७०४	१४०६०८	७.२१११०२६	३.७३२५११
५३	२८०९	१४८८५७	७.२६०१०९९	३.७५६२८६
५४	२९१६	१५७४६४	७.३१८४४९९	३.७७९७६३
५५	३०२५	१६६३०५	७.४१६१९८५	३.८०२९५३
५६	३१३६	१७५६१६	७.४८३३१४८	३.८२५८६१
५७	३२४९	१८५१९३	७.५४९८३४४	३.८४८५०१
५८	३३६४	१९५११२	७.६१५७७३१	३.८७०६७७
५९	३४८१	२०५३०९	७.६८११४५७	३.८९३९९६
६०	३६००	२१६०००	७.७४५९६६७	३.९१७८६७
६१	३७२१	२२६९८१	७.८१०२४९७	३.९३६४९७
६२	३८४४	२३८३२८	७.८७४०९७९	३.९५७८९३
६३	३९६९	२५००४७	७.९३२७५३९	३.९७९०५७
६४	४०९६	२६२१४४	८.०००००००	४.००००००
६५	४२२५	२७४६२५	८.०६२२५७७	४.०२०७२६
६६	४३५६	२८७४९६	८.१२४०३८४	४.०४१२४०
६७	४४८९	३००७६३	८.१८५३५४८	४.०६१५४८
६८	४६२४	३१४४३२	८.२४६२११३	४.०८१६५६
६९	४७६१	३२८५०९	८.३०६६११९	४.१०१५६६
७०	४९००	३४३०००	८.३६६२००३	४.१२१२८५
७१	५०४१	३५७९११	८.४२६४१९८	४.१४१९१८
७२	५१८४	३७३२४८	८.४८७२८१४	४.१६२१६८
७३	५३२९	३८९१७७	८.५४८००३७	४.१८२३३७
७४	५४७६	४०५२२४	८.६०८३२५३	४.२०२३३६
७५	५६२५	४२१८०५	८.६६०३५४०	४.२२२७१६३



(५३)

## वर्ग, घन आणि मूल

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूल	घनमूल
७६	५७७६	४३८९७६	८.७९७७७७	४.३९०८३४
७७	५९२९	४५६५३३	८.७७४९६४	४.३५४३७९
७८	६०८४	४७४५५२	८.८३१७६०९	४.३७२६५९
७९	६२४१	४९३०३९	८.८८०९९४४	४.३९०८५९
८०	६४००	५१२०००	८.९४४३७१९	४.३९०८७०
८१	६५६१	५३१४४१	९.०००००००	४.३९६७४९
८२	६७२४	५५१३६८	९.०५५३८५९	४.३९६४७९
८३	६८८९	५७१७०७	९.१११४३३६	४.३९६७७९
८४	७०५६	५९२७०४	९.१६५९५९४	४.३९६७५९
८५	७२२५	६१४१२५	९.२१९५४४५	४.३९६८३०
८६	७३९६	६३६०५६	९.२७३६१५५	४.३९६८५५
८७	७५६९	६५७५०९	९.३२७३७९९	४.३९६९४७
८८	७७४४	६८१४७२	९.३८१०३९५	४.३९७०६०
८९	७९२१	७०४९६९	९.४३३९८९९	४.३९७१४९
९०	८१००	७२९०००	९.४८६८३३०	४.३९७२५५
९१	८२८१	७५३५७१	९.५३९३९२०	४.३९७३४९
९२	८४६४	७७८६८८	९.५९१६६३०	४.३९७४५७
९३	८६४९	८०४३५७	९.६४३६७०८	४.३९७५५५
९४	८८३६	८३०५८४	९.६९५३५९३	४.३९७६३६
९५	९०२५	८५७३७५	९.७४६७९४३	४.३९७७०३
९६	९२१६	८८४७३६	९.७९७७५५०	४.३९७८५७
९७	९४०९	९१२६७३	९.८४८८५७८	४.३९७९७९
९८	९६०४	९४१९९२	९.८९९९४४९	४.३९८०९६
९९	९८०१	९७०९९९	९.९५९९७४४	४.३९८२०६
१००	१००००	१००००००	१०.०००००००	४.३९८३५०



## उत्तर, गुणोत्तर, प्रमाण, आणि धेदी.

व्याख्या.

(१) किती एक संख्यांचा दोन प्रकारे संबंध असतो.

प्रथम प्रकार. दोन संख्यांचे वजाबाकीवर आहे, ती गणित संबंधी.

आणि दोन संख्यांचे वजाबाकीस उत्तर म्हणावे, जसे ६ आणि

२ या दोन संख्यांचे उत्तर (वजाबाकी) ४ आहे.

दुसरा प्रकार. दोन संख्यांचे भागाकारावर आहे, ती भूमितिसं

बंधी. आणि दोन संख्यांचे भागाकारास गुणोत्तर म्हणावे, जसे

६ आणि ३ यांचे गुणोत्तर (भागाकार) २ आहे.

(२) या कामासाठी संख्या अथवा पदे उपाहिजेत. जिचा विचार कर

रणे ती प्रथम लिहून, तिच्या अग्रसर आणि जिची विचार करणे ती

मागून लिहून, तिच्या उपाग्रसर द्यावे, जसे वरचे दोन संख्या

ती ६ अग्रसर, आणि २ उपाग्रसर.

(३) कोणता ही अग्रसर आणि त्याचा उपाग्रसर मिळून दोन्ही

एक युग्म म्हणावे.

(४) दोन किंवा अधिक युग्मांचे उत्तर किंवा गुणोत्तर बरोबर ज

सलें द्यावे, त्या बरोबरीस प्रमाण द्यावे, आणि ते प्रमाण दा

खवणारी जी पदे ती प्रमाणपदे होत जसे ७, ९ आणि ३, ५ हे ग-

णित प्रमाण, तसे ६, १२ आणि ४, ८ हे भूमिती प्रमाण यांत भूमि

तिप्रमाण दाखविणे असल्यास प्रत्येक युग्माचे पदामध्ये असे

दोन विंदू व प्रत्येक युग्मामध्ये असे चार विंदू द्यावे. जसे ६, १२

३, ६

(५) प्रमाण दोन प्रकारचे आहेत; अखंड आणि खंड. जेव्हा दोन युग्मांचे उत्तर किंवा गुणोत्तर कोणत्याही युग्माच्या उपायसर आणि त्याचे जवळचे पुढील युग्माचा अग्रसर यांचे उत्तर किंवा गुणोत्तर याशी अनुक्रमे बराबर असेल, तर त्यास अखंड प्रमाण म्हणावे. आणि बराबर नसल्यास खंड प्रमाण म्हणावे. जसे.

८, १० आणि १२, १४ अखंड गणित प्रमाण.  $१६ : ३२ :: ६४ : १२८$  अ० भू० प्र०

२ २ २ उत्तरे बरोबर आहेत म्हणून २ २ २ गुणोत्तरे ब०

६, ८ आणि १४, १६ खंड गणित प्रमाण.  $१८ : ३६ :: ८ : १६$  ख० भू० प्र०

२ ६ २ उत्तरे बरोबर नाहीत म्हणून २  $\frac{६}{२}$  २ गुणोत्तरे नाहीत म्हणून

(६) दोन युग्मांची उत्तरे बरोबर असली, तर त्याला गणित प्रमाण म्हणावे; आणि गुणोत्तरे बरोबर असली तर त्याला भूमिति प्रमाण म्हणावे. जसे. ५, ७ आणि ११, १३ हे ग० प्र०  $८ : १६ :: ४ : ८$  हे भू० प्र०

(७) किती एकपदे एकाच उत्तराने किंवा गुणोत्तराने चढती किंवा उतरती असली म्हणजे त्या पक्षास श्रेढी म्हणावे. त्यांत पदे उतरत असली म्हणजे त्यास उतरती श्रेणी आणि चढत असली म्हणजे चढणी श्रेणी म्हणावे. जसे.

१, ३, ५, ७, ९, ११, १३ इ० चढ० ग० श्रे० २०, १७, १४, ११, ८, ५, २ इ० उ० ग० श्रे०

१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२, १३, १४, १५, १६, १७, १८, १९, २० इ० चढ० भू० श्रे० १२८, ६४, ३२, १६, ८, ४, २, १ इ० उ० भू० श्रे०

(८) कोणत्याही श्रेढीचा मध्यम पदास आदि दोबरील पदास उ० आणि पदसंख्येस ग०, जवळ जवळचा दोन पदांचा वजावा कीस उ० व जवळ जवळचा दोन पदांचा भागाकारास गुणोत्तर आणि श्रेढीतील

सर्व पदांचे बेरजेस सर्वधन ह्मणावे.

### गणितश्रेढी.

गणितश्रेढीमध्ये किती एक उपयोगी विषय पुढील सिद्धांतांत सांगतां.

प्रथम सिद्धांत. जेव्हा गणितश्रेढीत चार पदे आहेत, तेव्हा आद्यताची बेरीज दोन मध्यांचे बेर जे बराबर आहे. जसे ८, ६ आणि १०, ८ एथे  $८+८=१०+६=१६$

दुसरा सिद्धांत. कोणतेही गणितश्रेढीमध्ये आद्यतांची बेरीज त्या आद्यतांचे जवळचे दोन दोन पदांचे एक युग्म अशी त्यांचे जवळजवळचे पदांची जितकी युग्मे होतील, त्यांचे प्रत्येक बेरजे बराबर आहे, आणि श्रेढी विषम पद असल्यास मध्य पदाचे दुप्पटी बराबर आहे. जसे ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५ एथे  $३+१५=५+१३=७+११=९+९=१८$

तिसरा सिद्धांत. कोणतेही गणितश्रेढीमध्ये आद्यतांची वजा बाकी, उत्तर एकीन गळाने गुणिले. त्या गुणाकारा बराबर आहे. जसे ५, ८, ११, १४, १७, २० एथे  $२०-५=१५$  ही वजा बाकी उत्तर ३ आणि एकीन गळ ५ यांचे गुणाकार बराबर आहे.

चवथा सिद्धांत. आद्यतांची बेरीज गळाने गुणावी, आणि ती गुणाकार ही दोनी भागाबा भागाकार घेईल ती सर्व पदांची बेरीज (सर्वधन) आहे. जसे ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५, एथे  $(३+१५) \times ७ = ६३$

४ पद आहे की, दिलेले गणीतश्रेढीचे दुसरी श्रेढी दुसरी श्रेढी त्याची उलट करून घेऊन ती दोन्ही बेरजा घ्याव्या आणि त्या सर्व बेरजा प्रत्येकी दिलेल्या श्रेढीचे आद्यता पदांचे बेरजे बराबर होतील, आणि त्या बेरजा गळ संख्ये इतक्या

**कृत्ये.**

(१) आदि अंत आणि गछ यां पासून सर्वधन काढावयाचें.  
रीति. चपथे सिद्धांता मयाथें.

**उदाहरणें.**

(१) आदि ३ अंत ८१ आणि गछ ४० यां पासून सर्वधन काढ.  
(२) एका राजानें आपले १०५ शिपा  
यांस पागोटीं दिलीं मध्यमास १ शेंबट  
त्यास २०९ तेव्हां एकंदर पागोटीं-  
किती उत्तर ११०२५

(३) आदि अंत आणि गछ यां पासून उत्तर काढावयाचें.  
रीति. आद्यंतांची वजाबाकी एकोन गछानें भागावी. भागाकार येईल तें उत्तर.

**उदाहरणें.**

(१) आदि ३ अंत ८ गछ ४० यां पासून उत्तर काढ.  
(२) आदि १ अंत २०९ गछ १०५ यां पासून उत्तर काढ.  
 $\frac{८१-३}{३९} = २$  उत्तर उत्तर २

(३) आदि अंत आणि उत्तर यां पासून गछ काढावयाचें.  
रीति. आद्यंतांची वजाबाकी उत्तरानें भागावी. भागाकार येईल,  
तो एकोन गछ, त्यांत एक मिळवावा. सणजे गछ झाला.

**उदाहरणें.**

(१) आदि ३ अंत ८१ आणि उत्तर २ (२) एका राजानें शिपायांस पागोटी.  
दिली. याजकरिता त्यातील एक बेराज गछानें सुगिली असतो तो मुणाकार मूज  
थेदीचे दुप्पट होतो म्हणून दोहोंनीं भागिलें असतो मूळ थेंदीचे सर्व धन होतें.



२३ यां पासून गच्छकाद.

$$\frac{८१-३}{३} + १ = २० \text{ गच्छहे उत्तर}$$

दिलीं मथमास १ दुसयास २ जास,  
दोवटल्यास २०९ तेच्या एकंदर शि  
पाई किती? उत्तर, १०५

(४) आदि, अंत आणि उत्तर या पासून सर्वधन काढवयाचें.

रीति आद्यंतांची वजावाकी उत्तरानें भागावी; यांत १ मिळवून  
त्याणें आद्यंतांचे अर्ध बेरजेस गुणावें तो गुणाकार सर्वधन होईल.

उदाहरणें.

(१) आदि ५, अंत ६८ आणि उत्तर

२३ यां पासून सर्वधन काढ.

$$\left(\frac{६८-५}{३} + १\right) \times \frac{६८+५}{२} = ८०३ \text{ स.}$$

(२) कोणी मनुष्य देवाचे दर्शना

स जात होता. त्यानें वाटेत मथम

पायरीवर १ नारळ, पुढें मथ्येकीं दो

न चढवें शेवटीं १०३ असे ठेवितो,

त्यास किती नारळ लागतील?

उत्तर २७०४

(५) सर्वधन, उत्तर आणि गच्छ यां पासून आदि, अंत काढवयाचे.

रीति सर्वधन दोहोंनीं गुणून, तो गुणाकार गच्छानें भागावा नंतर

गच्छांत एकउणा करून उत्तरास गुणावें तो गुणाकार आणि पूर्व भा

गाकार यांचे बेरजेचें अर्ध तें मोडें पद आणि वजावाकीचें अर्ध तें

लहान पद होईल.

उदाहरणें.

(१) सर्वधन १६८०, उत्तर २, गच्छ

४० यां पासून आदि अंत काढ.

$$\frac{१६८० \times २}{४०} = ८४, २ \times ३९ = ७८,$$

(२) एका राजानें १०५ शिपायांस

११३५ पागोटी दिलीं अशी कीं, एका

पैसां दुसऱ्यास दोन जास्त या मजणें



$\frac{८४+७८}{२} = ८१$  मो० प.  $\frac{८४-७८}{२} = ३$  ल. तेंव्हां पहिल्या सव दोवटल्यास  
किती किती पागोटी दिलीं.

उत्तर { पहिल्यास १  
दोवटल्यास २०९.

(६) सर्वधन, आदि आणि अंत यां पासून उत्तर काढावयाचें.  
रीति: सर्वधन दोहोनीं गुणून, त्यांत आद्यंताची बेरीज, वजा करा  
वी, त्या बाकीनें आद्यंताचे वर्गाचे वजा बाकीला भागावे, भागाकर  
येईल तें उत्तर.

### उदाहरणे.

(१) सर्वधन १९३५, आदि ३, अंत ३, सर्वध  
न ८७ या पासून उत्तर काढ. न १६ त्या श्रेढीचें उत्तर काय?  
 $१९३५ \times २ - ९ = ३८८०$  उत्तर, ६ श्रेढीचें उत्तर.  
 $\frac{३८८०}{२०} = २$  हें उत्तर.

(७) आदि, अंत आणि सर्वधन यां पासून गच्छ काढावयाचें.  
रीति: सर्वधन दोहोनीं गुणून, तो गुणाकार आद्यंतांचे बेरजेनें  
भागावा भागाकर येईल तो गच्छ झाला.

### उदाहरणे.

(१) आदि ८, अंत १०५ आणि सर्वधन ८१३० या पासून गच्छ काढ. न १६ या पासून गच्छ काढ.  
 $\frac{८१३० \times २}{११३} = २०$  गच्छ हें उत्तर. उत्तर, ८ गच्छ

(८) एक दोवटील पद, उत्तर आणि गच्छ या पासून दुसरे दोवटील  
पद काढावयाचें.

रीति-उत्तर एकोन गणनें गुणावे, तो गुणाकार आद्यंतांची वजावा की होईल. लहान पद सांगितले आहे, तर हा गुणाकार त्या पदांत मिळवावा, सणजे मोठे पद होईल. आणि मोठे पद सांगितले आहे, तर हा गुणाकार त्या पदांत वजा करावा, सणजे लहान पद होईल.

### उदाहरणे.

(१) आदि ८, उत्तर २, गज १५ (२) अंत (१४), उत्तर (३) ग  
यां पासून अंत काढ.

उच्च यां पासून आदिकाढ.

$$२ \times १४ = २८ + ८ = ३६ \text{ अंत देऊ.}$$

उत्तर, +३ आदि.

(२) कोणते ही दोन पदां पासून एक गणित मध्य प्रमाण काढयाचें.  
रीति-आद्यंतांचे बेरजेचे अर्ध करावे, ते मध्य प्रमाण होईल.

### उदाहरणे.

(१) ३ आणि ११ यांचे एक गणित (२) एका घराचा धारण २५ हात  
मध्य प्रमाण काढ.

$$\frac{११+३}{२} = ७ \text{ हे उत्तर.}$$

आणि सांव १२ हात, यावर १ वासा  
आहे, तो मोडत असतां मध्यावर  
ठेक देणें आहे, तो किती यावा?

उत्तर १९ हात.

(३) कोणते ही दोन पदांची हवीं वितकीं गणित मध्य प्रमाणे काढ  
याचें.

रीति-मोठे पदांतून लहान पद वजा करावें, नंतर मध्य प्रमाणें जित  
कीं द्यावी, ती सख्या एकाधिक करून, तिचे ती बाकी भागाची भागाका  
र घेईल, ते श्रेढीचे उत्तर, हे लहान पदांत मिळवित घ्यावे, किंवा मो  
ठे पदांत वजा करीत घ्यावे.

## उदाहरणें.

(१) २ आणि २० यांची ५ गणित मध्य प्रमाणें काढ.

$$\frac{20-2}{5} = 3 \text{ उत्तर. } 2+3=5+3=8+3=11+3=14+3=17 \text{ अथवा}$$

$$20-2=18-2=16-2=14-2=12-2=10 \text{ उत्तर } 10, 12, 14, 16, 18$$

(२) ५१ हात लांबीचा चवथ्यावर घर बांधावयाच आहे, त्याला-  
सारसे अंतरानें १ वारें घालावयाची आहेत; जर एकेक बाराखा-  
ळीं एकेक हातरुंद भिंत घातली; तर प्रत्येक खणाची मधील रुंदी-  
किती? आणि बाराची रुंदी एकेक हात असल्यास प्रथम बारा पा-  
सून प्रत्येक बार किती अंतरावर घालावे.

उत्तर-

{ प्रत्येक खणाची रुंदी  $\frac{51}{5}$  हात  
प्रथम बारा पासून अंतर  $\frac{51}{5}$ ,  
 $11\frac{1}{5}$ ,  $12\frac{2}{5}$ ,  $13\frac{3}{5}$ ,  $14\frac{4}{5}$ ,  $15\frac{1}{5}$ ,  $16\frac{2}{5}$ ,  $17\frac{3}{5}$ ,  $18\frac{4}{5}$

## भूमिति श्रेढी.

भूमिति श्रेढीमध्ये किती एक उपयोगी विषय पुढील सिद्धांतां-  
त सांगतां.

प्रथम सिद्धांत:- जेव्हां चार पदे भूमिति प्रमाणांत आहेत, ते-  
व्हां आद्यंतां चा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकारा बराबर आ-  
हे, अथवा दोन गुणांचे गुणोत्तर बराबर आहे. जसें  $६:४::१२:८$   
एथें  $६ \times ८ = ४ \times १२ = ४८$  अथवा  $\frac{६}{४} = \frac{१२}{८}$

यावरून दोन मध्य पदांचे गुणाकारास आदिपदांचे भागिले-  
असता, अंत पद निघेल.

+ त्रैराशिकां हाच सिद्धान्त आधार आहे

दुसरा सिद्धांत. कोणते ही दोन गुणाकार बराबर असतील, तर त्यांचे गुण्य गुणक अवयवा पासून एक प्रमाण करिता येईल. जसें  $३६ = ३६$  हे दोन गुणाकार आहेत, यांचे गुण्य गुणक अवयव  $१२ \times ३$  अथवा  $६ \times ६$  अथवा  $९ \times ४$  इत्यादि यास्तव  $१२ : ६ :: ६ : ३$  अ०  $१२ : ९ :: ४ : ३$

तिसरा सि०. कोणते ही दोन संख्यांचे एक भूमिति मध्य प्रमाण दोन संख्यांचे गुणाकाराचे वर्गमूळ आहे. हे वरील सिद्धांताचे प्रथम उदाहरण वरून सिद्ध होते; जसें, २ आणि १८ यांचे मध्य प्रमाण ६ आहे.

प्रमाणत्व न मोडतां मिळवून, वजा करून, गुणून इत्यादि खाली लिहिल्या प्रमाणे फेरफार करून, पदे मांडतां येतील. जसें,  $८ : ४ :: १० : ५$  हे एक प्रमाण आहे.

फेरफार करून	मिळवून व वजा करून	गुणून.
$४ : ८ :: ५ : १०$	$८ \pm ४ : ४ :: १० \pm ५ : ५$	$८ \times ६ : ४ :: १० \times ६ : ५$
$५ : ४ :: १० : ८$	$८ \pm ४ : ८ :: १० \pm ५ : १०$	$८ : ४ \times ७ : १० : ५ \times ७$
$८ : १० :: ४ : ५$		

भागून	वर्गादिकरून	मूळ काढून.
$\frac{८}{३} : \frac{१०}{३} :: \frac{५}{३} : \frac{५}{३}$	$८^२ : १०^२ :: ५^२ : ५^२$	$\sqrt{८} : \sqrt{१०} :: \sqrt{५} : \sqrt{५}$
$८ : १० :: ५ : ५$	$८^२ : १०^२ :: ५^२ : ५^२$	$\sqrt{८} : \sqrt{१०} :: \sqrt{५} : \sqrt{५}$
		अथवा $८ : १० :: ५ : ५$

या विषयी पृथक् पृथक् सिद्धांत आदि कारण भूमितींत पहावे.

चवथा सिद्धांत. भूमिति श्रेढीचे दोन शीट पदांचा भागाकार श्रेढीचे गुणोत्तरास घात प्रकाशक एकोन गळ केला, त्या घाता बराबर आहे, जसें  $१, २, ४, ८, १६, ३२$  गये  $३२ = २^५$

याची सत्यता बीजरूपानें लिहतां. कोणते ही श्रेढीचे मध्यम पद (अ) गुणोत्तर

**पांचवासिद्धांत.** भूमिति श्रेढीचे दोन शोबट पदांची वजाबाकी एकीन गुणोत्तरानें भागावी, नंतर त्या भागाकारांत अतिमोठें पद मिळवावें. ती बेरीज सर्वधन झाले. जसें आदि २ अंत ४८६ गुणोत्तर २ यां पासून सर्वधन काढ.

$$\frac{४८६-३}{२} + ४८६ = ७२० \text{ सर्वधन हे उत्तर.}$$

**कृत्ये.**

(१) कोणते ही दोन पदां पासून एक भूमिति मध्यप्रमाण काढा वयाचें.

रीति. तिसरे सिद्धांता प्रमाणें

**उदाहरणें.**

(१) ४ आणि १६ यांचें भूमिति- (२) ९ आणि ८१ यांचें भूमिति-  
मध्यप्रमाण काढ. मध्यप्रमाण काढ.

$$४ \times १६ = ६४ \text{ आणि } \sqrt{६४} = ८ \text{ उत्तर.} \quad \text{उत्तर, २७}$$

(२) कोणत्या ही दोन पदां पासून द्यावी तितकी भूमिति मध्यप्रमाणें काढावयाचा.

रीति. मोठें पदास लहान पदानें भागावें, नंतर मध्यप्रमाणें जित त्तर (२) आणि गूढ (१) आहे ती श्रेढी या प्रमाणें होईल. अ, अर, अर, अर, अर, १, ३, अर यांत शोबटील पद, अर आहे तेव्हां आद्यंतांचा भागाकार र आहे यावरून उघड आहे की, दोन शोबटील पदांचा भागाकार श्रेढीचे गुणोत्तरा स घात प्रकाशक एकीन गूढ केला त्याचें बरोबर आहे.  
+ याची सिद्धता या पुस्तकाचे तिसरे भागी भूमिती श्रेढीत आहे. ती पहा.  
न. वरचे टिपेंत घेतलेली श्रेढी पुनः घे. अ, अर, अर, अर, अर, १, ३, अर यांत आदि अंतांचा भागाकार र आहे आतां या श्रेढीचा गूढ न आ हे लपून मध्यगूढ (१-२) आणि एकाधिक मध्यगूढ (१-१) आहे तेव्हां र



की, ज्ञावी तीस व्या एकाधिक करून, त्या भागाकाराचें तितकें घातम्  
ऊकाढावें; तें श्रेदीचें गुणोत्तर झालें त्यानें लहान पदास पुनः पुनः  
गुणितचलावें; अथवा मोठे पदास भागितचलावें; म्हणजे मध्यम  
माणें निघतील.

### उदाहरण.

२ आणि ४८६ यां पासून चार भूमिति मध्यममाणें काढ.

$$\left(\frac{४८६}{२}\right)^2 = ३ हे गुणोत्तर; २ \times ३ = ६ \times ३ = १८ \times ३ = ५४ \times ३ = १६२$$

$$\text{अथवा } ४८६ \div ३ = १६२ \div ३ = ५४ \div ३ = १८ \div ३ = ६$$

उत्तर, ६, १८, ५४, १६२, भूम.

### सर्कतवांटणी.

सर्कत वांटणी म्हणजे पैका, सामान, जमीन, अथवा कांहीं विषय  
म भागाचें जे विभागी त्याचें एकत्र आहे, त्यास तें विभागाप्रमाणें वां  
टून देणें.

सर्कत दोन प्रकारची आहे, एकेरी आणि दुहेरी.

जेव्हां प्रत्येक भाग केवळ कोणत्याही एक संख्येची किंवा वस्तूची  
प्रमाणांत आहे, म्हणजे ते भाग एकच वेळेस कामास लाविले आहेत,  
तेव्हां एकेरी, आणि जेव्हां प्रत्येक भाग दोन किंवा अधिक संख्यांची

याचें १०१३ इतकें घातम् ऊकाढिलें असा २८ गुणोत्तर) निघतें यावरून उ  
घड आहे की, मध्यपदे जितकी पाहिजेत ती संख्या एकाधिक करून, आद्यता  
चे भागाकाराचें तितकें घातम् ऊकाढवें म्हणजे तें श्रेदीचें गुणोत्तर होईल.

+ सर्कतवांटणीस व्यापारीत कोणी सामावाद् असें म्हणतात.

प्रमाणत आहे, म्हणजे ते विभाग भिन्न भिन्न वेळां कामास लाविले  
आहेत; तेव्हां तीस दुहेरी सर्कत म्हाणावे.

## एकेरी सर्कत.

रीति.

सर्व भागांची बेरीज घ्यावी, नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या. जसें  
सर्व भागांची बेरीज, त्यातील एकेक भागास, तसें वाढव्याचे सर्व  
राशीस, त्या त्या भागांची किंमत, अथवा सगळें मुद्दल (भांडवल)  
एकेक हिस्सास, तसा सर्व नफा किंवा तोट, त्याचें त्याचें हिस्सास.

## उदाहरणें.

(१) एक गलबत समुद्रांत बुडालें तें मालक दां १०००० रुपये कि  
मतीचे होते त्यांत डबे ३, अचे ३, बचे ३, आणि कचे ३ या प्रमा  
णें विभाग होते, तेव्हां प्रत्येकास किती किती रुपये लुकसान झालें.

$$३ + ३ + ३ + ३ = १२$$

$$\frac{१००००}{१२} = ८३३३ \frac{१}{३}$$

$$\frac{१००००}{१२} = ८३३३ \frac{१}{३}$$

$$\frac{१००००}{१२} = ८३३३ \frac{१}{३}$$

$$\frac{१००००}{१२} = ८३३३ \frac{१}{३}$$

उत्तर { डलालुकसान १२०० रुपये  
अलालुकसान ३२०० रुपये.  
बलालुकसान ३६०० रु.  
कलालुकसान २००० रु.

(२) तीन गांवांमध्ये ३२ विघे ६ पांड जमीन ओसाड आहे, ती त्या ती  
न गांवांस जमाबंदी प्रमाणें वांटून देण्याचा सरकारचा ठराव झाला.  
त्या तीन गांवांची जमाबंदी येणें प्रमाणें. म० ४६८ रु० ६ आ०, दु० ००१  
रु०, ति० १८१६ रु० १० आणे आहे, तेव्हां कोण कोणते गांवाकडे किती  
किती जमिन यावी?

	वि०	पा०	का०	
उत्तर.	मथव गांवाकडे ५	१	१९	४६३ २९९७
	दुसऱ्या गांवाकडे ७	१३	९	१२४७ २९९७
	तिसऱ्या गांवाकडे १९	११	११	१२०८ २९९७

## दुहेरी सर्कत. रीति.

प्रत्येक मनुष्याचे भांडवल त्याचे त्याचे सुदतीने गुणावे. नंतर त्या सर्व गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. मग या प्रमाणे राशी कराव्या. जसे सर्व गुणाकारांची बेरीज, त्याचे त्याचे गुणाकारास, तसे सो नफा किंवा तोटा किंवा जे कांही वाढावयाचे आहे ते, त्याचे त्याचे विभागस.

## उदाहरण.

(१) कांही एक काम अ, ब, क हे मत्येकी अनुक्रमे ८, १२, १६ दिवसांत करितात. पुढे त्याच असामीनी दुसरें एक काम करून १६ रुपये मिळविले तेव्हां ते मत्येकाने किती किती रुपये घ्यावे जर त्या कामांत अचे दररोज ६ तास प्रमाणे ९ दिवस, बचे ८ तास प्रमाणे १२ दिवस कचे १० तास प्रमाणे १६ दिवस लागले होते.

यांत प्रथम संकेता प्रमाणे क कांही वेळांत एक पट काम करितो तर ब तितकेच वेळांत १ पट करील आणि अ दुपट करील याज करिता.

$$\begin{array}{l}
 २ \times २ \times ९ = ३६ \quad २४ : ३६ :: १६ : ४८ \quad \text{अचे } ४८ \text{ दिवस} \\
 ४ \times २ \times १२ = ९६ \quad २४ : ९६ :: १६ : ४८ \quad \text{बचे } ४८ \text{ दिवस} \\
 १ \times १० \times १६ = १६० \quad २४ : १६० :: १६ : १६० \quad \text{कचे } १६० \text{ दिवस}
 \end{array}$$

(२) तिसी दिनमान असतां दहा असामी आठ दिवस कांही काम

करीत होते आणि बाकी राहिलेले काम बत्तिशी दिनमान झाल्या वर त्या दाहा असामी पैकीं आठ असामीनीं पांच दिवसांत पुरे केले. जर त्या असामीस दर रोज जेवण खाण व विधांतिया करितां दोन तास मोकळीक द्यावी लागत होती, तर तिशी दिनमानांत किती काम झाले व बत्तिशी दिनमानांत किती काम झाले.

तिशी दिनमान बत्तिशी दिनमान

उत्तर.  $\frac{५०}{७७}$  ,  $\frac{३७}{७७}$  काम.

(३) अब, क या त्रिवर्गानीं सर्कतीनें एक व्यापार आरंभिला त्यांत मांडवल अने आरंभी २५ रुपये दिले, नंतर आठ दिवसांनी ३२ रुपये दिले, पुढे तीन दिवस जाऊन ३८ रुपये दिले, तसें बनें आरंभी १५ रुपये दिले, पुढे सात दिवसांनी १३ रुपये दिले, पुढे पंधरा दिवसांनी १८ रुपये परत घेतले, तसें कनें तेरा दिवस गेल्यानंतर ५० रुपये दिले या प्रमाणें तो व्यापार अद्यावीस दिवस चालला त्यांत १०० रुपये नफा मिळाला तो मत्से कानें किती किती व्यापार.

उत्तर.	अने छा.	रु०	आ.	पै.	
	अने छा.	५०	१०	१०	$\frac{७०}{२७७}$
	बनें.	१०	५	५	$\frac{१५७}{२७७}$
	कनें.	२३	०	२५	$\frac{२९७}{२७७}$

वर्ग घनादिकांचा सहायाने-

चक्रवाटव्याज.

प्रथमरीति. एक रुपयाचे एक सुदतीचे व्याज करून त्यांत तो ५ करुपया मिळवावा, नंतर त्या राशीचा सुदतीचे संख्ये इतका घात



करून त्यास सुदलानें गुणावें, तो गुणाकार व्याज सुदल, रास होईल. इच्छा असल्यास त्यांत सुदल वजा करावें ह्मणजे बाकी राहील तें व्याज होईल.

### उदाहरणें.

(१) दर साल दर शेकडा १२ रु. ममाणें ११ रुपयांचें दोन वर्षांचें चक्र वाढ व्याज किती होईल? सुदल सहासहा महिन्याची.

रु० १०० = १२  
म १२ = ६

$$\frac{१२ \times ६ \times १}{१०० \times १२} = ०.०६$$

१.०६ ही एक सुदतीची एक रुपयाची रास

$$(१.०६)^६ = १.२६२४७६९६ चतु.$$

$$१.२६२४७६९६ \times १२५ = १५७.८०९६९$$

$$१५७.८०९६९ - १२५ = ३२.८०९६९$$

उत्तर. { रु० आ० पै.  
१५७ .. १२ .. ११-४४७०४ रास.  
३२ .. १२ .. ११-४४७०४ व्याज

(२) ५०० रुपये सुदल व्याज दर साल दर शेकडा ५ रुपये ममाणें व पैसांचे जाची सुदल अर्ध अर्ध वर्षाची तेव्हां दहा सुदती झाल्या त्या ची रास काय होईल?

रु० आ० पै.

उत्तर ६४००० ०००

दुसरी रीति. मथम रीती ममाणें एक रुपयाची एक सुदतीची रास करून तिचा सुदती संख्ये इतका घात कोष्ट कांत्तून घ्यावा, आणि त्यास सुदलानें गुणावें, गुणाकार व्याज सुदल, रास होईल.

### उदाहरण.

(१) २६० रुपये सुदल, व्याजाचा दर दर साल दर शेकडा ५ रुपये ममाणें पांच वर्षांची रास काय होईल?



(६९)

एधें ४३ रुप ये व्याजा समाणे पंच घात कोष्ट का तुज घेऊन खास सु  
दलानें शुणून शुणाकार ३२४.०१२० रु. आ० ये.

उत्तर, ३२४.०००... ३.३०४

## व्याजाचे घात कोष्टक.

यांत खाली लिहिले दरानें एकरुप याची मध्यम सुदतीस रास होतें  
तिचे २० वर्षे पर्यंत घात लिहिले आहेत.

वर्षे	३	३½	४	४½	५	६
१	१.०३००	१.०३५०	१.०४००	१.०४५०	१.०५००	१.०६००
२	१.०६०९	१.०६५९	१.०७०९	१.०७५९	१.०८०९	१.०९०९
३	१.०९२७	१.१००७	१.१०८७	१.११६७	१.१२४७	१.१३२७
४	१.१२५५	१.१३३५	१.१४१५	१.१४९५	१.१५७५	१.१६५५
५	१.१५९३	१.१६७३	१.१७५३	१.१८३३	१.१९१३	१.२०१३
६	१.१९३१	१.२०११	१.२०९१	१.२१७१	१.२२५१	१.२३५१
७	१.२३९९	१.२४७९	१.२५५९	१.२६३९	१.२७१९	१.२८३९
८	१.२८६८	१.२९४८	१.३०२८	१.३१०८	१.३१८८	१.३२८८
९	१.३३४८	१.३४२८	१.३५०८	१.३५८८	१.३६६८	१.३७६८
१०	१.३८३९	१.३९१९	१.४००९	१.४०८९	१.४१६९	१.४२६९
११	१.४३२२	१.४४०२	१.४४८२	१.४५६२	१.४६४२	१.४७४२
१२	१.४८०५	१.४८८५	१.४९६५	१.५०४५	१.५१२५	१.५२२५
१३	१.५२८५	१.५३६५	१.५४४५	१.५५२५	१.५६०५	१.५७०५
१४	१.५७६५	१.५८४५	१.५९२५	१.६००५	१.६०८५	१.६१६५
१५	१.६२४५	१.६३२५	१.६४०५	१.६४८५	१.६५६५	१.६६४५
१६	१.६७२५	१.६८०५	१.६८८५	१.६९६५	१.७०४५	१.७१२५
१७	१.७२०५	१.७२८५	१.७३६५	१.७४४५	१.७५२५	१.७६०५
१८	१.७६८५	१.७७६५	१.७८४५	१.७९२५	१.८००५	१.८०८५
१९	१.८१६५	१.८२४५	१.८३२५	१.८४०५	१.८४८५	१.८५६५
२०	१.८६४५	१.८७२५	१.८८०५	१.८८८५	१.८९६५	१.९०४५

### मिश्रगणित.

मिश्रगणित सणजे वेगळाले जातीचे रकू पदार्थ एकत्र केले असता त्या मिश्राचा भाव काढण्याचा एक गणित प्रकार आहे.

मिश्रगणिताचे दोन प्रकार आहेत, मध्यमिश्रगणित आणि लघुक्रम मिश्रगणित.

### मध्यमिश्रगणित.

प्रत्येक रकू पदार्थाचे भाव आणि परिमाणे सांगितली आहेत त्या पासून मिश्राचा भाव काढणे.

रीति. प्रत्येक रकू पदार्थाची परिमाणे त्याचे त्याचे भावांनी गुणावी आणि त्या गुणाकाराचे बेरजेस परिमाणाचे बेरजेने भागावे भागाकार येईल तो मिश्राचा भाव होईल.

### उदाहरणे.

(१) १५, १६, १८ रुपये तोळा याद (२) एक मनुष्याने ५ मण काकवी राचे १२, २०, २८ तोळे सोने मिश्र दर मणी २८० म० घेऊन त्यांत ३ मण पाणी घातले आणि त्यांत ६८० मण द्राची राब ४ मण घातली ते व्हा त्या मिश्रास भाव काय लागेल?

$$१५ \times १२ = १८०$$

$$१६ \times २० = ३२०$$

$$१८ \times २८ = ५०४$$

$$६०) १००४ (१६.७३३३३३$$

$$\text{उत्तर } २८० \text{ आ० पे. } १२ \dots ६ \frac{८}{३}$$

मिश्रगणित हे त्रैलोक्याचाच एक भाग आहे. कारण रकू पदार्थाचे परिमाणे बेरजेस जर परिमाणाचे एकतर रकू पदार्थाचे एकतर किमतीस, या पद्धतीची किमती.

## व्युत्क्रममिश्रगणित.

अनेक भावांचे शब्द पदार्थ मिश्र करावयाचे, जास सांगितला-  
भाव न्हावा, तर कोणत्या परिमाणानें मिश्र करावें, तें काढण्याची रीति.  
ही रीति मध्यमिश्रगणिताचा उलट आहे.

### प्रथमरीति.

शब्द पदार्थांचे भाव एका खातीं एक येतील, असे अनुक्रमानें  
लिहावे. आणि त्यांचे डावे बाजूस मध्ये असें चिन्ह करून, मिश्र  
भाव लिहावा. आणि शब्द पदार्थांचे पुढें उभी ओळ काढावी. अथ  
वा मिश्र भावाहून जे शब्द पदार्थांचे भाव उणें असतील. त्यांस-  
अधिकाशी आणि अधिक असतील त्यांस उण्याशी अखंड रेघ  
करून जोडावे.

इच्छिले मिश्र भावाहून जे शब्द भाव, उणें असतील, त्यांचा म-  
त्येकी वजावाक्या जे अधिक असतील, त्यासमोर मांडाव्या. आणि  
मिश्र भावाहून जे अधिक असतील, त्यांचा मत्येकी वजावाक्या  
उणें असतील त्यासमोर मांडाव्या. आणि त्यांचा बेरजा घ्याव्या. ती  
त्या मिश्रांतील शब्द पदार्थांची परिमाणें.

✽ या रीतीची सत्यता उघड आहे की, मिश्र भाव लागण्यास एका, अधिक भा-  
वांचे शब्द पदार्थांचा जितका तोंडा तितकाच एका उणे भावांचे शब्द पदार्थांचा  
फा झाला पाहिजे. जसे १२ आणि १० रुपये दराचे सोने मिश्र करून १२ रुपया  
नी विकण्याचे आहे, तर रीती ममाणें. १५ [१३] ३ म्हणजे १० दराचे २ तोंडे  
१२ नी विकले त्यांत ६ रुपये तोंडा झाला. परंतु १२चे दराचे २ तोंडे १२ नी विकले  
त्यांत ६ रुपये नफा झाला. तेव्हा मत्येक अधिक उण्या भावात नफ्या इत-  
का तोंडा देंच याचे आदि करण आहे.

## उदाहरणें.

(१) १४, १५, १८, २२ रुपये दरांचे सोने एकत्र आढून २० रुपये दरानें विकावयास इच्छितो तर कोणकोणते दराचें किती किती मिश्र करावें.

तोळे.		तोळे.
$\left. \begin{array}{l} १४ \\ १५ \\ १८ \\ २२ \end{array} \right\} \begin{array}{l} २ \\ २ \\ २ \\ २ \end{array}$	अथवा	$\left. \begin{array}{l} १४ \\ १५ \\ १८ \\ २२ \end{array} \right\} \begin{array}{l} २ \\ २ \\ २ \\ २ \end{array}$
६+४+२=१२		६+४+२=१२

(२) कोणी एक दुकानवार दर बुधिल २ शिलिंग ६ पेन्स, ३ शिलिंग ८ पेन्स, ४ शिलिंग, आणि ४ शिलिंग ८ पेन्स असे चार भावांचे गडू एकत्र मिश्र करून दर बुधिल ३ शिलिंग १० पेन्स या भावानें विकावयास इच्छितो, तर त्याणें मिश्र करावयास कोण कोणते गडू किती किती परिमाणानें घ्यावे?

उत्तर २ शि० ६ पे० दराचें २ बु०, ३ शि० ८ पे० द० २ बु०  
४ शि० ८ पे० द० २ बु०, ४ शि० ८ पे० द० २ बु०

## दुसरी रीति.

जेव्हां मिश्राचें परिमाण सांगितलें आहे तेव्हां पूर्वरीती प्रमाणें मिश्राची परिमाणें काढावी, नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या.

मिश्राचे परिमाणाचे वेर जेस, जर त्यांतील एकेक मिश्राचें परिमाण; तर सांगितले परिमाणास, त्या जातीचें नवें परिमाण.

## उदाहरणें.

(१) ४, ६, ८, ९ रुपये पड्डा दराचें तांदुळ ४२ पड्डे एकत्र मिश्र करून

$७\frac{1}{2}$  दशनें विकावयास इच्छितो तर कोणते जातीचे किती किती तांदुळ

ध्यावे?

पत्ते

पत्ते

$$\left. \begin{array}{l} ४ \frac{1}{2} : ७ :: ४२ : ९ \\ ५ \frac{1}{2} : ७ :: ४२ : ३ \\ ६ \frac{1}{2} : ७ :: ४२ : ९ \\ ७ \frac{1}{2} : ७ :: ४२ : २१ \end{array} \right\} \begin{array}{l} १ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = २ \quad १४ : २ :: ४२ : ६ \\ १ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = २ \quad १४ : २ :: ४२ : ६ \\ १ \frac{1}{2} + २ \frac{1}{2} = ४ \quad १४ : ४ :: ४२ : १४ \\ १ \frac{1}{2} + ३ \frac{1}{2} = ५ \quad १४ : ५ :: ४२ : १४ \end{array}$$

(२) १५, १७, १८, १९ रुपये तीळा दराचे सोने मिश्र करून १० रुपया नीं तीळा विकावयाचे, परंतु ते मिश्र ४० तोळे व्हावे तर मल्येक जातीचे किती किती तोळे मिश्र करावे?

तोळे

$$\left. \begin{array}{l} १ + \frac{1}{2} = १\frac{1}{2} \quad ११ : १\frac{1}{2} :: ४० : ५\frac{1}{2} \\ १ + \frac{1}{2} = १\frac{1}{2} \quad ११ : १\frac{1}{2} :: ४० : ५\frac{1}{2} \\ २ + १ = ३ \quad ११ : ३ :: ४० : १४\frac{2}{3} \\ २ + १ = ३ \quad ११ : ३ :: ४० : १४\frac{2}{3} \end{array} \right\} \text{उत्तर.}$$

(३) एक मनुष्याने एका सावकाराचे १००० रुपये कर्ज देणे होते ते देते वेळी त्या कर्जदाराने काही मोहोराव काही पुतळ्या मिळून ८५ नग दिले तेवढ्याने त्याचे कर्ज फिटले यावरून मोहोराव पुतळ्या किती हो त्यातें सांग? मोहोरेचा दर १५ रु० व पुतळ्याचा दर ५ रुपये आहे.

उत्तर मोहोरा ५७, पुतळ्या २९

+ या स्वकीयांतून स्वभावावर अनेक प्रश्नां सांगता येतील, परंतु त्यातून बहुतेक प्रकारिक प्रश्नां प्रसूत.

हेइरोया नामें सेराव्युसचा गणाय होता त्याने, सगळा बाह्य सोन्याचा मुकुट तो नारास कयाचास सांगितला, नंतर तो त्याने करून आणिल्यावर त्यास काही रुपये किं वा तांबें मिश्र केले असें नजरेस आले, परंतु ते किती याचा निश्चय होवा म्हणून आर्कि मी दीजया नामें एक वतुर पुरुष आणितो तोही तेथें होता, तेव्हा त्या मुकुटातील हिवा



### तिसरीरीति.

जैहां एक शब्द पदार्थांचे परिमाण असुक असावे असें सांगितलें आ  
हे तेहां मध्यमरीती ममाणे मिश्राची परिमाणें काढून, नंतर या ममाणें  
राशी कराव्या. जसें सांगितले परिमाणाचें शब्द पदार्थांची वजावा  
की दुसरे वेग वेगळे शब्द पदार्थांचे वजावाव्यास, तर सांगितलें परि  
माण वेग वेगळे इच्छिते परिमाणास होईल.

### उदाहरणें.

(१) एका वाण्यानें ३ पैसे दोरदराची काकवी ६ पैसे दोरदराचा म  
ध आणि पाणी मिश्र करून ५३ पैसे दोर ममाणें विकलें. पात पाणी  
२० दोर हीनें तेहां मध आणि काकवी किती किती होती?

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{2} : \frac{6}{2} :: 20 : 20 \text{ मध} \\ \frac{3}{2} : \frac{6}{2} :: 20 : 23 \text{ काकवी} \end{array} \right\} \text{उत्तर.}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2}$$

जें परिमाण काढायास तो त्याचतुर पुरुषाचवळ दिवा पुढे.

त्याने एक शब्द सोन्याची, एक तांबे किंवा रुपे याची अशा दोन भरीव आकृती करून त्या पा  
ण्यानें तोंड पर्वत भरलेले पात्रांत पावोयानें बुडविल्या, नंतर त्या आकृतीच्या योगें पात्रांत  
न बाहेर पडले पाण्याची तोंड केल्या पासून त्या भरीव आकृतीचें स्वभार त्यास विहित झाले,  
म्हणजे या पासून आणि त्या मल्लेकाचें सांगितलें वजन पासून त्या मुकुटांत काढून  
आणि हीण किती होते त्याचें परिमाण काढितो आले.

आतां कसना करकी, त्या भरीव आकृतिचें मुकुटाचाचें मल्लेक वजन १० दोर आहे आ  
णि शब्द रुपे किंवा तांबे याचे भरीव आकृती मुकुटासुद्धें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी २५ दोर  
आणि शब्द सोन्याचे भरीव आकृति मुकुटासुद्धें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी ५२ दोर आ  
णि त्या मिश्र सोन्याचें मुकुटासुद्धें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी ५४ दोर, तर त्यासुद्धें  
तील शब्द सोने आणि हीण याचें मल्लेक परिमाण काढाईल.

आतां केवळ तांबे किंवा रुपे याचा भाग २२ शब्द सोन्याचा ५२ आणि मिश्राचा ५४ आहे.

याजकरितां ५४ : ५२ :: १२ : ३ दोर तांबे  
५० : ५२ :: २८ : ७ दोर शब्द सोने

हे उत्तर.

(२) एक बितारी दरपानास २१ पैसे प्रमाणे गंजि फांची ४० पाने आणि  
दरपानास २१ पैसे प्रमाणे गंजि फांची कांही पाने एकत्र करून, ९ पाना  
स २१ पैसे प्रमाणे विकणार, तेव्हा त्याने दोन पैसे दराची किती पाने  
आवी?

उत्तर ८० पाने.

### इष्टराशि.

जा प्रश्नांची उत्तरे पूर्वरीतींनी निघत नाहीत, त्यांची उत्तरे कल्पित  
संख्यांचे आधारेने काढण्याचा एक मार्ग आहे, त्यास इष्टराशि अ-  
थवा मिथ्या मनोधृत, अथवा लुप्त बोध असें म्हणतात.

इष्टराशि दोन प्रकारची आहे. एकेरी आणि दुहेरी.

जेव्हा किती एक प्रश्नांची उत्तरे एकच कल्पित संख्येचे आधारेने  
निघतात. म्हणजे इच्छित संख्येस दुसरे कोणतेही संख्येने गुणिले  
किंवा भागिले अथवा इच्छित संख्या तिने तीच अथवा तिचे कोणते  
ही भागाने अधिक किंवा उणी केली, तेव्हा तीस एकेरी इष्टराशि म्हणा-  
वे, आणि जा प्रश्नांची उत्तरे दोन कल्पित संख्यांचे आधारेने निघ-  
तात म्हणजे विवक्षित संख्या दुसरे कोणतेही संख्येने मिळविली  
किंवा गज्या केली, परंतु ती संख्या सत्य संख्येची कोणत्या प्रमाणाने  
आहे हे गडक नाही. अशा जातीचे प्रश्नांत येतात तिला दुहेरी  
इष्टराशि म्हणवे.

एकेरी इष्टराशि.  
रीति.

इङ्गली संख्या का दाववा साठी कोणती ही संख्या घ्यावी, आणि म-  
 थांत सांगितल्या प्रमाणें तिची कति करावी नंतर या प्रमाणें रात्रीक  
 राख्या जसें कलित संख्येचे उसन्यास जर सत्य संख्येचे उसन्यतर,  
 कलित संख्येस सत्य संख्या होईल.

### उदाहरणें.

(१) एक मनुष्यानें आपलें द्रव्य तीन पुत्रांस वांटून दिलें तें असें कीं,  
 प्रथमास  $\frac{1}{2}$  दुसऱ्यास  $\frac{1}{3}$  तिसऱ्यास  $\frac{1}{4}$  तथापि त्याचे जवळ ६५० रुपये  
 शिल्लक राहिले यावरून त्यानें सर्व द्रव्य किती व मयेकास किती किती  
 दिलें.

पहिलें द्रव्य ६००० रुपये अशी कलित संख्या घे. आतां ६००० वा  $\frac{1}{2}$   
 $= ३०००$ ,  $\frac{1}{3} = २०००$  आणि  $\frac{1}{4} = १५००$  मिळून तिघांने हिवाची वेत  
 ज ६५०० ही ६००० वांटून वजा करून १३०० बाकी राहिले तेव्हां.

१३०० : ६५० :: ६००० : २९०० हें सर्व द्रव्य.

$३००० \times \frac{1}{2} = १५००$  प्रथम पुत्रास.

$३००० \times \frac{1}{3} = २०००$  दुसरे पुत्रास.

$३००० \times \frac{1}{4} = ७५०$  तिसरे पुत्रास.

हें उत्तर.

(२) बाजारांत एक पैदाची पाने ६०, एक पैदाचा कपाया १२ आणि  
 एक पैदाचा लेंवगा २० या प्रमाणें मिळतान, तेव्हां कोणी एकाच आ-  
 पलेचाकरास सांगितले कीं, एक पैदांत कपायाचा दुप्पट पाने आ-

+ या रीतीचें कारण उघड आहे की, उसनें आपजले संख्याची प्रमाणाव आहेत.

जसें न अ : अ :: न ह : ह, अथवा  $\frac{न}{अ} = \frac{न}{ह}$  अ  $\frac{ह}{अ}$  अ  $\frac{ह}{न}$  ह.

किंवा  $\frac{न}{अ} = \frac{ह}{न}$  इत्यादि : अ ::  $\frac{ह}{न}$  ह, आणि इत्यादि.

णि वानावा दुपट लंबगा घेऊन ये तेन्नां सपाया, पाने आणि लंबगा  
किती किती घेतील.

उत्तर, सपाया ४<sup>३</sup>, पाने १५<sup>३५</sup>, लंबगा २५<sup>३५</sup>

### दुहेरी इष्टराशि.

प्रथमरीति. समोराने कामाचे उपयोगी दोन कल्पित संख्या आ  
वा आणि त्याची मभाचे संकेता ममाणे वेगळाळीं कामे करावी या  
दोन संख्या पासून जी दोन उत्पन्ने होतील त्यांत आणि सत्य संख्ये  
चे उत्पन्नांत जे अंतर असेल ते अधिक उणे चिन्हाने युक्त करून  
पृथक् पृथक् लिहावे. नंतर प्रथम अंतराने दुसरी संख्या व दुसरे  
अंतराने प्रथम संख्या गुणावी आणि अंतरांची चिन्हे सारूप आ.  
हेत तर गुणाकाराचे वजाबाकीला अंतरांचे वजाबाकीने भागावे  
आणि चिन्हे विरुध्द आहेत तर गुणाकाराचे बेरजेला अंतरांचे बे  
रजेने भागावे भागाकार येईल ती सत्य संख्या होईल.

+ सिद्धंत, या रीतीस आश्रय द्या आहे की, प्रथम अंतर दुसरे अंतरास आहे जशी  
प्रथम मिथ्या संख्या आणि सत्य संख्या यांची वजाबाकी दुसरी मिथ्या संख्या आणि स  
त्य संख्या यांचे वजाबाकीस आहे, जेन्ना अशा ममाणे न का होत, तेन्ना या रीतीने उत्तर  
प्ररोवर काढिता येत नाही ही रीति खरी आहे असे पूर्व आश्रयावरून बांधिली.  
अ आणि ब ही दोन अक्षरे चिन्हे घेतले संख्यांची असतील. तसें आ आणि बा ही त्यां  
ची मभाचे संकेता ममाणे उत्पन्ने असतील, तसें र आणि स ही त्यांची अंतरे असतील,  
एव जेन हे संकेताचे सत्य उत्पन्न यांची वेगळाल्या आ आणि बा यांचा वजाबाका  
र आणि स असतील, आणि इ ट संख्या दाखवायास क्ष घेतला, एव जे क्षचे उत्पन्न  
न होईल.

तेन्ना न-आ-र आणि न-बा = स अथवा वा-आ-र-स आतां जास या रीतीचा  
आश्रय आहे, त्या ममाणे ममाणे रः सः क्षः अः क्षः बः अक्षपदे आणि मध्यपदे  
युक्त एव जे रक्ष-रब-सक्ष-सअ नंतर त्यानाने रक्ष-सक्ष-रब-सअ, भागावरने  
रक्ष-सअ ही द्विती संख्या आहे, एव जे ही रीति तेन्ना आहे की, जेन्ना दोन्ही अंत  
रे कमी पडतात.



आता मध्य संकेताचे मध्यम मनाणजुळे अशा मिथ्या संख्या ९,११  
आणि ३,५ या घेऊन

१९७९  
१९८०  
१९८१  
१९८२  
१९८३  
१९८४  
१९८५  
१९८६  
१९८७  
१९८८  
१९८९  
१९९०  
१९९१  
१९९२  
१९९३  
१९९४  
१९९५  
१९९६  
१९९७  
१९९८  
१९९९  
२०००  
२००१  
२००२  
२००३  
२००४  
२००५  
२००६  
२००७  
२००८  
२००९  
२०१०  
२०११  
२०१२  
२०१३  
२०१४  
२०१५  
२०१६  
२०१७  
२०१८  
२०१९  
२०२०  
२०२१  
२०२२  
२०२३  
२०२४  
२०२५  
२०२६  
२०२७  
२०२८  
२०२९  
२०३०

म. अं.

$2 \times 2 = 4$   
 $2 \times 3 = 6$   
 $4 + 2 = 6$

उत्तर, मधुसूताडागर, दु. झा. ७

२२) अ आणि व या दोघांजवळ १३.१५ या प्रमाणाने रुपये होते, न  
वर बनें एक बाग खरेदी करून, २०० रुपये शिल्लक ठेविडे आणि अने  
त्याच किंमतीचा एक बाग घेऊन, २०० रुपये कर्ज केले. यावरून अ आ  
णिव यांजवळ रुपये किती होत? या बागाची किंमत काय?

जर दोही उसने सत्य उत्पन्नाहून अधिक असतील, स्पष्टजे आ आणि वाही दो  
ही नहून अधिक असतील, तर न-आ=र आणि न-वा=-स म्हणजे र आणि स  
ही दोन्ही (-) कृण आहेत या अकारिते-र-सः क्ष-अः क्ष-व, परंतु-र-सः+र+स  
याज करिता र-सः क्ष-अः क्ष-व, आणि सर्व वाही पूर्व प्रकाश नमाने बसोवर निघेल.  
परंतु जर एक उत्पन्ना आकगी आणि दुसरे उत्पन्ना वा अधिक असेल, अथवा एक  
अंतर र (+) धन आणि दुसरे अंतर स (-) कृण असेल तर पूर्व प्रमाण नमान-  
राही करून समीकरण साहे रूप होईल क्ष=र+स आ आणि ही सीति अंतर  
विरूप आहेत तेन्हा उपयोगी होय.  
नः चिन्हें सरूप स्पष्टजे धन धन किंवा कृण कृण.



उत्तर १५०० अजबकर ३०००, बजकर १००० बागाची किंमत कर  
 दुसरी रीति. प्रथम रीती प्रमाणे दोन संख्या पाखून दोन अंतरें  
 काढावीं, नंतर घेतल्या दोन संख्यांची बजावाकी त्यांतील एक अंतरा  
 नें गुणावी, आणि त्या गुणाकास अंतरांचीं विन्हें सरूप असल्यास  
 त्यांचे बजावाकीनें आणि विरूप असल्यास बेरजेनें भागावें. अथवा  
 या प्रमाणे त्रैराशिक मांडावें जसे २ अंतरांची बजावाकी, त्यांतील पु  
 क अंतरास तर दोन संख्यांची बजावाकी, त्या अंतराचे शब्दहीस, न  
 तर ते इच्छाक जा संख्येचे अंतर का मांत घेतले आहे, ती संख्या अ  
 धिक असल्यास तीत बजा करावें, आणि कमी असल्यास मिळवावें  
 म्हणजे सत्य संख्या उत्पन्न होईल.

### उदाहरण.

(१) एक चाकर २० दिवसांचे करारानें चाकरीस राहिला. त्याचा करार  
 जा दिवसां ती भांगलें काम करील त्या दिवसाचे त्यास पावणे दोन रुप  
 ये द्यावयाचे परंतु जा दिवसां खेळेल, किंवा कामावर न येईल, त्या  
 दिवसाचा त्याज पाखून उलट एकरुपया दंड घ्यावयाचा. पुढे सुद्धत  
 पुरी झाल्यावर करारा प्रमाणे त्याचे २५ रुपये देणें ठरले तेव्हां तो  
 किती दिवस कामावर आला होता, व खेळणें वगैरे मिळून किती दि  
 वस गैर हजर होता?

उत्तर, २० दिवस कामावर होता. १० दि. खेळें वगैरे.

+ म्हणजे पूर्व आश्रय सांगितला त्या प्रमाणे रः सः क्ष-अः क्ष-व, याज करितां  
 भागाकारानें रः सः व-अः क्ष-व, परंतु वा-आ-र-स याज करितां वा-आः सः व-अ  
 क्ष-व, अथवा वा-आः व-अः सः क्ष-व, म्हणजे ही दुसरी रीति आहे.



## अनुक्रमणिका

### भाग २

विषय.	पृष्ठ.	विषय.	पृष्ठ.
व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाठी.	१	गोव्यांचे राशींचें गणित.	३३
मिळवणी.	४	भूमिति प्रमाण आणि थेटा.	४३
वजा बाकी.	५	समीकरण.	४५
गुणाकार.	६	एकवर्ण समीकरण.	४८
भागाकार.	८	वर्ग समीकरण.	६०
अपूर्ण बीज.	१०	घनादि समीकरण.	६९
बीजवर्ग घनादि.	१५	व्याज.	७४
बीजवर्ग घनादिमूळ.	१८	सरळ व्याज.	७५
करणी.	२१	चक्रवाट व्याज.	७५
गणित प्रमाण आणि थेटा.	३१	प्राप्ति.	७६
		अनंत थेंणी.	७८

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Main body of handwritten text, appearing to be a list or series of entries, though the script is highly faded and illegible.

# गणितसार.

## भागतिसरा.

### बीजगणित.

#### अस्य आण लिहिण्याची परिपाठी

१ बीजगणित ह्मणजे हर एक संख्येचे अंकां वाचून अक्षर चिन्हे करूनच गणित करण्याची विद्या. ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे.

२ या विद्ये मध्ये सर्व पदार्थ जातीचे संख्यांचे स्थानी अक्षरें योजितात, आणि त्या संसर्गां मिळवणी, वजाबाकी इत्यादि जां कामें करावयाची तीं स्वल्प रूप कार्य मकाशक चिन्हे करून करितात.

३ बीजगणितांत कित्येक पदें व्यक्त ह्मणजे जांची किंमत ठाऊक आहे, आणि किती एक पदें अव्यक्त ह्मणजे जांची किंमत ठाऊक नाही, अशी असतात. व्यक्त पदें दाखवायास मूल लिपीचीं अ, ब, क इ. अक्षरें घ्यावीं आणि अव्यक्त पदें दाखवायास गूळ लिपीचीं क्ष, य, ज इ. अक्षरें घ्यावीं.

४ कामें दाखविणारी चिन्हे जांस कार्य मकाशक चिन्हे ह्मणतात, तीं बलांचे उपयोग दुसरे भागाचे मारंभीं दाखविले आहेत.

५ सरूप पदें ह्मणजे जांचीं अक्षरें आणि वर्गादि एकच आहेत. जैसे, अ, ४अ, अक, ५अक इ.

६ विरूप पदें ह्मणजे जांचीं अक्षरें आणि वर्गादि मकाशक भिन्न आहेत. जैसे, ५अ, क, क्ष इ.

७ एक पद अथवा एकाची पद ह्मणजे जांत एकच रकम आहे. जैसे,



६ अक अथवा १३ अइ०

= संयुक्त पद स्मरण जे जात एका हुन अधिक पदें अधिक किंवा उण्यानि न्हानें युक्त आहेत जसें, अ+क, अ० ३ अक+५ ब, अ० ६ अ+३ ब-६ इ०

९ संयुक्त पदां मध्ये दोन पदे असली स्मरण जे त्यांस द्वियुक्त पद, तीन असली स्मरण जे त्रियुक्त पद, चार असली स्मरण जे चतुर्युक्त पद इ० स्मरणें जसें, दि० अ+ब, त्रि० अ+४ ब-६, च० अ-ब+कड+६ इ०

१० द्वियुक्त पदांचा एक पद ऋण असले स्मरण जे त्यास धनर्ण पद स्मरणें जसें, अ-ब, अक-६ इ०

११ धन पद स्मरण जे जें अधिक विन्धानें युक्त आहे जसें, + अ अथवा +५ ब अ० कै इ०

१२ ऋण पद स्मरण जे जें उणे विन्धानें युक्त आहे जसें, - अ, - कड अ० - अ इ०

१३ सरूप विन्हे स्मरण जे सर्व धन किंवा सर्व ऋण आहेत जसें, + कड + म + ९ अथवा - ९ सै कै अक इ०

१४ विरूप विन्हे स्मरण जे काहीं धन आणि काहीं ऋण आहेत जसें, अक-कै + म इ०

१५ वेळ्या मकाशक (गुणक) जो पदाचे मार भी लिहितात जसें,

१३ अ, १५ कड एथें १३, १५ हे वेळ्या मकाशक (गुणक) आहेत.

१६ घात मकाशक किंवा घात मूळ मकाशक स्मरण जे काय, तें दुसरे भागी लिहिलें आहे.

१७ खंड पद अथवा करणी स्मरण जे जाचें मूळ पूर्ण येत नाही जसें,

+ जें पद विन्हा सांचून असले, तें अधिक विन्धानें युक्त आहे, असें समजावें, परंतु तें मार भी असले पाहिजे, नाहीतर गुणक होऊ लागेल.

१५ अ. ५३, २ अ, अ, ३ अ इ.

१८ अलंड पद स्रणजे जें पद करणी वाचून आहे. जसें, ३ अब, ४ कड इ.

१९ पदाचा व्युत्क्रम स्रणजे तें पद उलट लिहिणें अथवा त्या पदानें (१७) भागिला जसें, अ, ३ यांचे व्युत्क्रम ३, अ इ.

२० जीं अक्षरें एकैक पदाचे संख्या निवेदनार्थ येतात, तीं इच्छेस येतील वही मांडावी. जसें अ, व, क यांचा गुणाकार अबक = अकव = वअक

= वकअ = कअव = कवअ अ. या प्रमाणें क + व + अब - उ = व + अव - उ + क = अव - उ + क + व = क - उ + व + अव, इ.

यांत व वून करून धनरकन असेल ती आरभी लिहावी.

वरचा व्याख्या समजाया करितां कांही उदाहरणें लिहितां.

मनांन आणकीं, पुढील उदाहरणां अ = ५, व = ५, क = ४, उ = १, इ = ० या किमती आहेत.

### उदाहरणें.

(१) २कै - ३अव + अ पांवी संख्या काढ. (२) १क -  $\frac{३अव}{२अक+क}$  यां. सं. काढ.

३२ - १० + २१५ = १५० हे उत्तर.

२ -  $\frac{१५}{२५+५} = २ - \frac{१५}{३०} = २ - \frac{१}{२} = १\frac{१}{२}$  हे उत्तर.

(३)  $\frac{१कव}{२} \times \frac{अ}{३} + \sqrt{अ + व}$  इ.

(४)  $(अ + क) + १क \sqrt{अक-वक}$

पांवी संख्या काढ.

पांवी संख्या काढ.

उत्तर १०

उत्तर ६

(५) ३कै -  $\frac{व}{२} \cdot \frac{क + ३अक}{२}$  मिळ. इ.

(६)  $\frac{व-इ}{३} \times \frac{अ+व}{क-इ}$  यांवी संख्या

पांवी संख्या काढ.

काढ.

उत्तर २०

उत्तर १० इ

## मिळवणी.

बीजगणितांत मिळवणी तीच होय. पदे सरूप आहेत, तेव्हा त्यांची एकरकम करणे आणि विरूप आहेत तेव्हा त्यांचे त्यांचे चिन्हांनी युक्त करणे.

पदे व चिन्हे सरूप आणि विरूप यावरून मिळवणीचे तीन प्रकार आहेत.

### प्रथमप्रकार.

यांत पदे व चिन्हे सरूप आहेत.

रीति. सर्व वेळामकाशाक मिळवून, सरूप पदाचे अक्षर चिन्हाचा चे पुढे लिहावे आणि त्यास सरूप पदाचे चिन्ह जोडावे.

### उदाहरणे.

(१)	(२)	(३)	(४)
५अ+७य	७वे-६के	९केश-५	५य+६क्षरे
९अ+३य	२वे-३के	५केश-५य	५५य+७क्षरे
अ+४य	३वे-१०के	२केश-३य	२५य+९क्षरे
८अ+५य	४वे-२के	१४केश-११य	५५य+११क्षरे
२३अ+१४य	१३वे-१६के	३०केश-२०य	१३५य+२०क्षरे उ०

### दुसराप्रकार.

यांत पदे सरूप असून चिन्हे विरूप आहेत.

रीति. सर्व धन वेळामकाशाची बेरीज घ्यावी व ऋण वेळामकाशा कांची बेरीज घ्यावी आणि मोठ्या बेरजेतून लहान बेरीज वजा करून त्याचा कीस मोठ्या बेरजेचे चिन्ह करावे, आणि त्या पुढे सरूप पद जोडावे.  
+ चिन्हा विषयीचे प्रथम प्रकारांत पहा.

## उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
क्षे+य-२अ	१९अ-६अ-५व-६	क्षे+५य+३	क्षे+२य-३न
२क्षे-२य+३अ	४अ+०अ+२व-१	०क्षे-३य+५	मक्षे-मय-३न
-क्षे+५य-७अ	१५अ+४अ-७व-३	२क्षे+११य-२	नेक्षे-नय-३न
२क्षे+४य-६अ	०अ+६अ-१०व-१०	-४क्षे+९य+६	

## तिसरा प्रकार.

यांत पदे व चिन्हें विरूप आहेत.

रीति. जीं पदे सरूप असतील तीं पूर्व प्रकाराप्रमाणे एकत्र करावी.  
आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे चिन्हांनी जोडून लिहावी.

## उदाहरणें.

(१) ४बक्ष-१५+३क्षे	(२) ११+अ-५व
५क्षे+२बक्ष-५क्षय	४ब+४अ-२५व
७+क्षय-३५क्ष	५व-२को+३
५क्ष+१३-२क्षे	२+७व-३५व
६बक्ष+५+६क्षे-४क्षय-२५क्ष	१५+अ+६व-४५व-२को
(३) म५य+क्षे+३अ	(४) (अव)+५अ+क्षे-३य
-५य-५क्ष+७व	अने+वने-(अ+क्षे)+४य+३
नमवे+२क्षे-२अ	

## वजावाकी.

रीति. जा पदा पासून कोणतेही पद वजा करावयाचे ते मध्यम लिहून

नंतर जे वजा करावयाचे ते त्याचे खाती लिहावे; परंतु त्यांत सरूप  
दे असतील तीं एका खाती एक येतील अशी लिहावी. नंतर खालचे रक  
मेची चिन्हे बदल करून, अथवा केळीं असें मनांत आणून दोन ही र  
कमांची बेरीज करावी. हाणजे वजाबाकी झाली.

### उदाहरणे.

(१)	(२)	(३)	(४)
१२५ + ५ अ - ७ क	५ अक + ६ य	३ य + २ ख + ५ क्ष	१ अ + ५ य + ६
९६ - ३ अ + ४ य	२ अक - ५ य	४ य + ६ - १ क्ष + ३ अ	१ अ - ५ य + ५
३६ + ४ अ - ७ क - ४ य	२ अक + ११ य		

### गुणाकार.

गुण्य आणि गुणक यांचीं प्रदे एकाकी किंवा संयुक्त यावरून याचे  
अनेक प्रकार आहेत.

#### प्रथम प्रकार.

गुण्य आणि गुणक दोन्ही एकाकी आहेत.

ही ति. गुण्य आणि गुणक यांचे वेगळे प्रकाराक परस्पर गुणून त्या  
गुणाकाराला दोन्ही रकमांचीं अक्षरे जोडून लिहावी.

गुण्य आणि गुणक यांचीं चिन्हे सरूप असल्यास गुणाकार धन  
आणि विरूप असल्यास ऋण होतो.

### उदाहरणे.

(१)	(२)	(३)	(४)	(५)
-----	-----	-----	-----	-----

+ चिन्हा विषयीचे दुसरे प्रकारांत पहा.

- चिन्हा विषयीचे तिसरे प्रकारांत पहा.



५अ	-३अ	११कड	-५अक्ष	(अ+क्ष)
७अ	४व	-३डव	-४म	-३(अ+क्ष)
३५अअ कि० ३५अ	-१२अव	-३३कडव	२०अक्षम	-३(अ+क्ष)

## दुसरा प्रकार.

यांत गुण्य संयुक्त आणि गुणक एकाकी आहेत.

रीति. प्रथम प्रकाराप्रमाणे गुण्याची एकेक रकम गुणकाने वेग  
आधी गुणावी आणि गुणाकार बेईल तो एका पुढे एक त्याचे त्याचे  
विधाने युक्त करून लिहावा.

## उदाहरणे.

(१)	(२)	(३)	(४)
७क्ष-५व	४अक्ष-४ड	अमे-३क+७	क्ष+ये+५
३क	११व	वक	३अवक
२१कक्ष-१५वक	४५अवक्ष-४५वव	अवेमक-३वकी ७वक	

## तिसरा प्रकार.

यांत गुण्य आणि गुणक दोन्ही संयुक्त आहेत.

रीति. गुणकांतील एकेक पदाने गुण्यास पूर्व प्रकाराप्रमाणे पृ  
थक् पृथक् गुणावे, गुणाकारास आरंभ डावे करून करावा आणि  
गुणाकार लिहिते वेळी पूर्व ओळीचे डावे करील एक स्थान सोडून  
दुसऱ्या ओळीस आरंभ करावा, सणजे सरूप प्रथे एका साली एक  
येऊन मिळवणीस श्रम पडणार नाहीत.

संयुक्त पदांचा गुणाकार कधी असा संक्षेप रूपाने लिहावा की,

संयुक्त पदों सांक्यीत अथवा कौसांत मांडून, मध्ये गुणाकाराचे चिन्ह करावे.

### उदाहरणे.

(१)	(२)	(३)
अ+ब	५अक्ष+५	(अ+क्षय)
अ+ब	४क्ष+५	-(अ-अवयव)
अ+अव	२०अक्ष+४क्षय	
अव+ब	१०अक्षय-५	
अ+२अव+ब	२०अक्ष+४क्षय-१०अक्षय-२५	
(४)	(५)	(६)
२क्ष+२-०अक्ष+५	२क्ष+२क्षय	१अ+२(अ+ब)
५क्ष+अ-ब	क्ष+५	अ+२(अ+ब)

### भागाकार.

भाज्य आणि भाजक एकाची किंवा संयुक्त असतात यावरून त्याचे तीन प्रकार आहेत.

#### प्रथम प्रकार.

सांत भाज्य आणि भाजक एकाची आहेत.

रीति. अंकगणिताप्रमाणे भाजक भाज्याचे मागे अथवा बराबरी अपूर्णा किंवा पूर्ण भाज्याचे खाली आशा प्रकारे दोनही रकमा लिहाव्या. नंतर भाज्य भाजकाचा होईल तेवढा संक्षे-

पकरावा. सप्तमे भागाकार द्वारा।

भाज्य भाजकांशी बिन्दु सरूप असल्यास भागाकार धन (१) आ  
णि विरूप असल्यास ऋण (२) होवो.

### उदाहरणें.

(१) ८ अक यांस २ क यांणी भाग. (२) १३ अक यांस ३ क यांणी भाग.

८ अक ÷ २ क अथवा २ क ) २ अक

उत्तर ४ अक

अ.  $\frac{१३ अक}{२ क} = ६ अक ६ क$

(३) २ क यांस ३ क यांणी भाग.

उत्तर १ क

(४) ३० अक यांस २ क यांणी भाग.

उत्तर १५ अक

### दूसरा मकार.

यांत भाज्य संयुक्त आणि भाजक एकाकी आहेत.

रीति. भाज्यांतील सर्व पदे पूर्व मकारा ममाणें भाजकानें वेगवेगळीं  
भागावीं.

### उदाहरणें.

(१) (अक + २ बक + क) ÷ क, अ.  $\frac{अक + २ बक + क}{क} = अक + २ बक + क$

(२) (२० अक + १० अक + ५) ÷ ५ अक = ४ अक + २ अक + १ क उत्तर.

(३) ५ (अक + २ क) ÷ (अक + २ क) = ५ (अक + २ क) उत्तर.

(४) ६ अक + १२ अक आणि ९ अक यांस अक यांणी भाग.

### तिसरा मकार.

यांत भाज्य आणि भाजक दोन्ही संयुक्त आहेत.

रीति. अंक गणित रीतीने भाज्य भाजक छिदावे. दोहोंतही

+ चिन्हा विपरीत वचथे मकारांत पहा.

पदे मोठ्या घाता पासून उतरती लिहावी.

आल्याचें प्रथम पद भाजकाचें प्रथम पदानें प्रथम प्रकारास  
भाणें भागाचें आणि जो भाग लागेल तो भागाकार स्थळीं लिहून  
त्याणें सर्व भाजक गुणून, गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा. आ  
णि याकी वरवरचा एक भाग घ्यावा. पुनः पूर्वेप्रमाणें भागाचें या  
प्रमाणें दोषटपर्यंत अंक गणिता प्रमाणें कराचें. बाकी राहिल्यास  
व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें लिहावी.

### उदाहरणें

(१) अक+बक) अकै+४अवकै+४अवकै+बकै (अकै+३अवक  
अकै+अवकै

\* + ३अवकै+४अवकै

३अवकै+३अवकै

\* + अवकै+बकै

अवकै+बकै

(२) अ+ब+क) अव+अवै+२अव+बकै+बकै (अव+बक.आ

### अपूर्णबीजगणित.

अपूर्णबीजगणितांत सामें आणि रीति अपूर्णाकगणिताप्रमाणें  
च आहे.

### प्रथमप्रकार.

भागानुबंधपूर्ण बीजास विषम अपूर्णबीजाचें रूप द्यावयाचा.  
रीति. पूर्णबीज अपूर्णबीजाचे छेदानीं गुणून त्या गुणाकारांत  
अंदा निवडावे आणि त्या खाली तो छेद लिहावा. स्तूणजे विषम-

अपूर्णबीजाचें रूप झालें.

### उदाहरणे.

(१) कड-कै -  $\frac{५कड+अ-२अ}{२}$  या भागानुबंधपूर्णबीजास विष

मअपूर्णबीजाचें रूप दे.

$\frac{१कड-२कै-५कड-अ+२अ}{२}$   $\frac{२अ-अ-२कै-२कड}{२}$  हें उत्तर.

(२)  $\frac{४कै+३अकै-२कै+४}{५अ} = \frac{२०अकै+३५अकै-२४कै-४}{५अ}$  उत्तर

### दुसरा प्रकार.

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजाचें अथवा भागानुबंधपूर्ण बीजाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. अंशांस छेदानीं भागावे, भागाकार येईल, तो पूर्णबीज झाला. बाकी राहिल्यास भागाकाराचे बाजूस लिहून खाली छेद लिहावे.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{अक्ष३+बक्ष३}{६३}$  यास पूर्णबीज रूप अ. भागानुबंधपूर्ण बीज रूप दे.

$(अक्ष३+बक्ष३) \div ६३ = अ+बक्ष३$  हें उत्तर.

(२)  $\frac{१५अ+५अ}{२अ+३अ-२अ-४}$  यास पूर्णबीज अ. भागानुबंधपूर्ण बीज रूप दे.

$\frac{२अकै+६अकै+३अकै}{अ+क} = \frac{२अकै+३अकै-२अ-४}{अ+क}$  उत्तर.

### तिसरा प्रकार.

अपूर्णबीजास सम छेद करावयाचा.

रीति. नवे अंशां करितां मति पदाने अंशास त्याचे त्याचे छेद



बांभून सर्व छेदानीं गुणावें आणि सम छेदा करितां सर्व छेद परस  
रगुणावे ही व दुसरी सर्व छति अपूर्णाकांत लिहिल्याप्रमाणें करावी.

### उदाहरणें.

(१)  $\frac{३}{५}$  कक्ष आणि  $\frac{५}{५}$  अंश यांस सम छेद रूपदे.

$$\frac{३}{५} \times \frac{५}{५} \times (५ - ५) = (३ - ३) \times \frac{५}{५} = \frac{(३ - ३) \times ५}{५}$$

$$\frac{५}{५} \times (५ - ५) \times ५ = ५ - ५ = ०$$

$$\frac{५}{५} \times ५ \times \frac{५}{५} = ५$$

$$\frac{५}{५} \times \frac{५}{५} \times (५ - ५) = ५ - ५ = ०$$

(२)  $\frac{५}{५}$  अंश आणि  $\frac{५}{५}$  अंश यांस सम छेद रूपदे.

### चवथाप्रकार.

अपूर्ण बीजाने पदांभा दृढ भाजक काढायाचा

रीति. मोठें पद लहान पदानें भागावें, बाकी राहील तो भाजक  
कल्पून त्याणें पूर्व भाजकास भागावें याप्रमाणें बाकी वून्य राहीप  
रित करावें. शेषदीलजी भाजक नीच दृढ भाजक होईल.

### उदाहरणें.

(१)  $\frac{५}{५}$  अंश आणि  $\frac{५}{५}$  अंश यांचा दृढ भाजक काढ.

उत्तर अ-ब

टीप. भाजक पदांमध्ये जीं अक्षरें आणि अंक सांधारण अस  
तील ते भागून रद्द करावे; नंतर दृढ भाजक काढावा.

(२)  $\frac{५}{५}$  अंश आणि  $\frac{५}{५}$  अंश यांचा दृढ भाजक काढ. उत्तर, ५+३

(३)  $\frac{५}{५}$  अंश आणि  $\frac{५}{५}$  अंश यांचा दृढ भाजक काढ.

$\frac{५}{५} + \frac{५}{५} = \frac{५+५}{५} = \frac{१०}{५}$

+ याची सिद्धता दुसरे भागीत आहे.

## पांचवाप्रकार.

अपूर्ण बीजांचा संक्षेप करावयाचा.

रीति. पूर्वप्रकाराप्रमाणे अंशांछेदांचा दृढ भाजक काढून त्याने अंशांछेदांस भागावे; भागाकार येईल तो संक्षेप झाला.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{३अ + ६अक + ३अके}{अक + ३अके + ३अक + क}$  यांचा संक्षेप कर.  
एथें  $(अ + क)$  हा दृढ भाजक आहे. याणें अंशांछेदांस भागून,

उत्तर,  $\frac{३अ}{अक + क}$

(२)  $\frac{अ-अब}{अ + २अब + ब}$  यांचा संक्षेप कर.

उत्तर.

## सहावाप्रकार.

अपूर्ण बीजांची मिळवणी करावयाचा.

रीति. पदेसमछेद असल्यास अंशांची बेरीज घ्यावी; आणि त्या स्वातीं समछेद लिहावा. आणि पदेसमछेद नसल्यास समछेद करून वरसांगितल्याप्रमाणे मिळवणी करावी. पदे भागालुबंध असल्यास अपूर्ण बीजांची बेरीज घेऊन ती पूर्ण बीजांचे बेरीजेस जोडून लिहावी.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{५अ + २कड}{अ + ब}$  आणि  $\frac{३अ}{अ + ब}$  यांची मिळवणी कर.  
 $\frac{५अ + २कड}{अ + ब} + \frac{३अ}{अ + ब} = \frac{५अ + २कड + ३अ}{अ + ब} = \frac{८अ + २कड}{अ + ब}$   
(२)  $\frac{अ - ५अब + ६अक + ३अके}{अ + ब}$  आणि  $\frac{५अ + २कड}{अ + ब}$  यांची मिळवणी कर.  
उत्तर,  $\frac{६अ + २ब + ३अके + २अक + ३अके + २अक + क}{अ + ब}$

### सातवामकार.

अपूर्णबीजाची वजाबाकी करावयाचा.

रीति. पदे समछेद असल्यास अंशांची वजाबाकी करून त्यासाठीं समछेद लिहावा; परंतु पदे समछेद नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगितल्या प्रमाणे वजाबाकी करावी.

### उदाहरणे.

- (१)  $\frac{५अ}{४} आणि \frac{३अ}{४}$  यांची वजा कर.  $(२) १२अक्ष + ३य - \frac{३क}{४}$  यांतून ५क्ष  
 $\frac{५अ}{४} - \frac{३अ}{४} = \frac{२अ}{४}$  हे उत्तर.  $\frac{५-४क}{४}$  हे वजा कर.  
 (३)  $\frac{५अ + ६क्ष}{४}$  यांतून  $\frac{१६क्ष + (१६अ)}{४}$  उ०  $१२अक्ष + ३य - ५क्ष - \frac{३अक - ४य + ६क्ष}{४}$  हे वजा कर.

### आठवामकार.

अपूर्णबीज पदे परस्पर गुणावयाचा.

रीति. गुणाकाराचे अंशा करितां गुण्य आणि गुणक यांचे सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदां करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे म्हणजे गुणाकार झाला; गुणाकार करणा पूर्वी गुण्य आणि गुणक यांचे अंश छेदां होईल तेवढा संक्षेप करावा.

### उदाहरणे.

- (१)  $\frac{अ}{३}$  आणि  $(\frac{अ}{३} + \frac{१अक}{३})$  हे परस्पर गुण.

$$\frac{अ}{३} \times \frac{अ + १अक}{३} = \frac{अ^२ + १अकअ}{९} = \frac{अ^२ + अकअ}{९}$$

- (२)  $\frac{अ}{१५}$ ,  $\frac{क}{३}$ ,  $\frac{३}{३}$  आणि  $\frac{क}{३}$  हे परस्पर गुण.

न जेव्हा अपूर्ण बीजासंगती पूर्ण बीज गुणा याचे आहे तेव्हा पूर्ण बीजाचे अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे, आणि जर पूर्ण बीज आणि अपूर्ण बीजाचे छेद सारखे आहेत नंतर अंश हाच गुणाकार आहे.

## नववाचकारः

एक अपूर्ण बीज पदासहस्र्याने भागयावा.

रीति. भाज्याने अंश आणि छेद भाजकाचे अंश आणि छेद यांणीं अनुक्रमे निःशेष भागिले जातील तर भागाचे आणि तसे न होईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदलून त्यांणीं भाज्यास गुणावे.

### उदाहरणे.

(१) $\frac{३अ}{५} \div \frac{५अ}{५} = \frac{३अ}{५} \times \frac{५}{५अ} = \frac{३अ}{५अ}$	(२) $\frac{३अक}{५कड} \div \frac{५अव}{५ड} = \frac{३अक}{५कड} \times \frac{५ड}{५अव}$
$\frac{३अ}{५} \div \frac{५अ}{५} = \frac{३अ}{५} \times \frac{५}{५अ} = \frac{३अ}{५अ}$	$\frac{३अक}{५कड} \div \frac{५अव}{५ड} = \frac{३अक}{५कड} \times \frac{५ड}{५अव}$
हे उत्तर.	= ३व हे उत्तर.

(३)  $\frac{१कक्षम}{५अ=२} \div \frac{अ-क}{क}$  हे भाज्य (  $\frac{३क}{५} + \frac{३व}{५}$  ) या भाजकांनी भाग.

## बीजवर्गघनादि.

बीजवर्गघनादि सगळ्यां सांगितले मूळ बीज पुनः पुनः त्याच मूळ बीजानें गुणून वाढविलेले जें बीज ते. जसे कोणत्याही पदाचा वर्ग, घन, चतुर्घात इत्यादिकाय होतो हे पहाणे.

रीति. सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्यानेच घात मकारा कसं रचेल एककमी वेळां पुनः पुनः गुणावे. शेष दिलेले गुणाकार इच्छित वर्ग घनादि होईल. मुळास अक्षर विहें असतील तर त्याचा साधारण वर्गादि मकाराक इच्छित वर्गादि मकाराकानें गुणून तो गुणाकार त्या मुळास घात मकाराक करावा सगळे वर्ग घनादि होईल. पदास वेळां मकाराक असल्यास त्याचे वर्ग घनादिकरून ते त्या पदाचा वर्ग घनादिकांस जोडविले जावे.   
 ॥ याची सिद्धता व आणखी विचार दुसरे भागी व्यवहारी अपूर्णा काचे भागा



टीप. मुळाचे मकादाक विद्ध धन असल्यास वर्गादि धन आणि  
ऋण असल्यास सप्तधात धन आणि विषम धात ऋण होतील.

### उदाहरणें.

(१) ५अ<sup>३</sup> याचा वर्ग कर.

५अ<sup>३</sup> × ५अ<sup>३</sup> = २५अ<sup>६</sup> हे उत्तर.

(२) २अ<sup>३</sup> याचा पडधात कर.

उत्तर ४अ<sup>३</sup> (२अ<sup>३</sup> × २)

(३) अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> पदे + व याचा वर्ग कर.

उत्तर अ<sup>६</sup> अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> व<sup>२</sup> + २अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> व + व<sup>२</sup>

(४) अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> क<sup>३</sup> उ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> याचा घन

कर.

सरणेंद्राक न्यूटन. याणें दियुक् पदाचें वर्गादिक कसकसाक  
रितां जीरीति केली आहे ती खाली लिहिले कोष्टकावरून समजेल.

(अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>)<sup>३</sup> = अ<sup>३</sup> + ३अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> + ३अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>  
अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

कारात पदा.

+ विधाविषयीचें पांचवें मकारांत पदा.

क. (अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>) या दियुक् पदाचा न घात करावयाचा आहे असे मनांत आण.

आतां, अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

ह्याक घात

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

यादि घात.

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>

अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup> विघात.

यावरून (अ<sup>३</sup> + अ<sup>३</sup>) याचे न घाताचे मध्यम पद अ<sup>३</sup> होईल, कारण ते न घातल्या  
क अचा परस्पर गुणाकारानें झाले आहे. आणि कोणत्याही घातांत असें आ  
हे की, मध्यम ओळीतील दुसरे आणि दुसरे ओळीतील पहिले या पदांचा गुणा  
णाकार, आणि पहिले ओळीतील पहिले आणि दुसरे ओळीतील दुसरे या  
पदांचा गुणाकार, या दोन गुणाकारांची बेरीज दुसरे पद होतें.

दियुक् पदाचा मध्यम घातांत दुसऱ्या पदास अ<sup>३</sup> घातजे. हा अक गुणक क्ष  
या पदास येतो, दिघातांत अचा एक घात गुणक येतो, विघातांत अचा



यांत अ = मथमपद, क्ष = दुसरे पद आणि म धातुप्रकाशक.

मूल त्रियुक्पद अथवा चतुर्युक्पद असल्यास त्याचे द्वियुक्पद-  
करून नंतर वर्गादिकरावे आणि त्या पदाचा किमती आंत ठेवा.  
या. जसे. अ + क्ष + कड + २४ या चतुर्युक्पदाचे (अ + क्ष) + (२४ कड + २४)  
हे द्वियुक्पद आहे याचा इच्छिला घात करून त्यांत त्याचा किमती  
लिहाव्या.

द्विघात येतो याप्रमाणे पहातो असे समजतं की, मथमपदाचा घात प्रकाश-  
क एकोन इतका दुसरे ओळीतील मथमपदास घात प्रकाशक करून ते पद म-  
थम ओळीतील दुसऱ्या पदास गुणक होते. म्हणजे (अ + क्ष) या द्वियुक्पदाचा  
(न) घातांत अ हा क्ष या पदास गुणक होईल आणि द्विघात करा याचे वे-  
ळेस मथम आणि दुसरे पद यांचा दोन गुणाकाराची वेरीज होई. आणि मति  
गुणाकाराचे वेळेस मथम ओळीतील मथमपद आणि दुसरे ओळीतील दु-  
सरे पद यांचा गुणाकार एक वेळ मिळविला जातो. याजकरितां त्रिघाताचे वे-  
ळेस तीन वेळां, चतुर्घाताचे वेळेस चार वेळां, याप्रमाणे मिळविला जातो. म्हणजे  
(न) घातांतील दुसऱ्या पदास मथमपदाचा घात नकाशाका इतका वेळ प्रका-  
शक होतो. याजकरितां दुसरे पद न अ + २ क्ष होईल.

द्वियुक्पदाचा वर्ग करणे आहे तेव्हा तिसऱ्या पदाकरितां अ म्हणजे (१) हा गु-  
णक दुसऱ्या पदाचे वर्गास म्हणजे क्ष यास घेतो आणि घनकरणे असल्यास जगा  
एक घात आणि चतुर्घात करणे असल्यास अचा वर्ग दुसऱ्या पदाचे वर्गास  
गुणक घेतो. यावरून दिसतं की, मथमपदाचा घात प्रकाशकांत दोन उणे इ-  
तके दुसऱ्या ओळीतील मथमपदास घात प्रकाशक करून ते पद दुसऱ्या ओ-  
ळीतील दुसऱ्या पदाचे वर्गास गुणक होते. म्हणजे (अ + क्ष) या द्वियुक्पदाचे  
न घातांत अ हा क्ष या पदास गुणक येईल आणि त्रिघात करायला वेळे-  
स तिसऱ्या पदाकरितां दुसऱ्या पदाचा वर्ग आणि मथमपदाचे तीन वेळ-  
म्हणजे (२ + २) = २ वेळ गुणाकार मिळविले जातात. चतुर्घात करायला वे-  
ळेस सहा वेळ म्हणजे (४ + ४) = ४ वेळ गुणाकार मिळविले जातात. याजक-  
रितां न घातांतील तिसऱ्या पदास न अ + २ क्ष हा वेळ प्रकाशक होतो. तेव्हा तिसरे  
पद न अ + २ क्ष + २ अ + २ क्ष हे आहे याप्रमाणे द्वियुक्पदाचे न घातांतील चवथे पद  
न अ + २ क्ष + २ अ + २ क्ष याप्रमाणे पुढेही.

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots + nA_n = A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots + nA_n$$

$$(n) \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \dots + \frac{1}{n} A_n = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \dots + \frac{1}{n} A_n$$

उत्तर,  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$  अर्थात्  $\frac{3}{4}$  अक्ष - २५० अक्ष + ६२५ अक्ष

$$((2b+3d) + \frac{1}{2}\sqrt{k-d})^2 = (2b+3d)^2 + 2(2b+3d)\sqrt{k-d} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2k+3h)\sqrt{(k-h)} + \frac{1}{2}(k-h) = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ & + (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1\sqrt{3})(k-h) + (\frac{1}{2}2k+3h)(k-h) + \frac{1}{2}(k-h) \end{aligned}$$

बीजवर्गादिमूळ.

बीजवर्गादिभूक क्षणजे वर्गादिकाची उलट आहे, व त्यांत जांबे  
वर्गादिभूक काढावयाचे ते पद एकाकी अथवा संयुक्त असते, या  
बद्दल त्याचे तीन प्रकार आहेत.

## प्रथमप्रकार

एकाकी पदाचे मूळ काढायाचा.

रीति. अंक गणित रीतीने येव्हा प्रकाशकाचे मूळ काढावे आणि  
अक्षर चिन्हांचा वर्गादि प्रकाशक इच्छित्या मूळ प्रकाशकाने भा  
गून, तो भागाकार त्या अक्षरास वर्गादि प्रकाशक करावा; नंतर ते  
पद येव्हा प्रकाशकाचे काढिले मूळास जोडावे. त्यापेजे इच्छिलें मूळ  
होईल.

+ धनपदार्थे कोणतेही समसूक्त धन अथवा ऋण आहे आणि विषमसूक्त धन आहे. ऋणपदार्थे विषमसूक्त ऋण, आणि समसूक्त अथवा ऋण आहे याचा विचार

## उदाहरणें:

(१) २५ वें यांचें वर्गमूळ काढ.

 $\sqrt{25} = 5$  वें उत्तर.(२)  $\frac{२५००}{१५५६}$  यांचें वर्गमूळ काढ.उत्तर,  $\frac{२५००}{१५५६}$ (३)  $\frac{२२००}{१५५६}$  यांचें घनमूळ.उत्तर,  $\frac{२२००}{१५५६}$ 

(४) २५ वें यांचें घनमूळ काढ.

उत्तर, २५

(५)  $\frac{२५००}{१५५६}$  यांचें वर्गमूळ आणि घनमूळ काढ.उत्तर { वर्गमूळ, अशान्व  
घनमूळ, २५०० }

## दुसरा प्रकार.

संयुक्त पदांचें वर्गमूळ काढायला.

रीति. अंकगणितांत वर्गमूळ काढण्याची रीति लिहिली आहे,  
त्या प्रमाणेंच ही जाणावी.

## उदाहरणें:

(१)  $१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$  यांचें वर्गमूळ काढ.(२)  $१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$  (१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००) $१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$  $१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$  $१०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$   
 $+ १०० + ४०० + ४०० + ४०० + ४००$ 

\* \* \*

(३) अ-अव यांचें वर्गमूळ काढ. (४) १ + अ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, अ-अव  $\frac{१००}{१५५६}$  उत्तर  $१ + \frac{१००}{१५५६} = १ + ६$ 

विद्याविषयीने सहाय्यप्रकारांत पहा.





## उदाहरणें.

- (१) अ-२अब+३अबे-२अब+ब यांचे वर्गमूळ काढ.  
 अ-२अब+३अबे-२अब+ब (अ-अब+ब) वर्गमूळ हे उत्तर.  
 अ-२अब+३अबे-२अब+ब  
 २अ) \* - २अब  
 अ-२अब+अबे = (अ-अब)  
 २अ) \* \* + २अबे  
 अ-२अब+३अबे-२अब+ब = (अ-अब+ब)  
 \* \* \* \*

- (२) अ-१२अक+२१६अके-२१६के (३) १-६ यांचे घनमूळ काढ.  
 यांचे घनमूळ काढ. उ० २अ-६के (४) १-६ यांचे (१) घनमूळ काढ.

## करणी.

करणी म्हणजे जाचे मूळ बराबर येत नाही ते पद या करणीस मूळ प्रकाशकाने अथवा मूळ चिन्हांने युक्त लिहितात. जसे ५ अथवा ५ आणि के अथवा के

## प्रथमप्रकार.

अखंडपदास करणीचे रूप द्यावयाचे.  
 रीति. सांगितल्या पदास करणीचे घातापर्यंत वाढवावे. आणि या सती करणी जोडावी.

## उदाहरणें.

- (१) ब-५ यांचे वर्गमूळाचे रूप दे. (२) अ-६ यांचे घनमूळाचे रूप दे. (अ-६) = अ-६  
 (ब-५) × (ब-५) = ब-१०ब+२५  
 ब-५ = √(ब-१०ब+२५) = (ब-१०ब+२५)  
 अ-६ = (अ-६) हे उत्तर.



## दुसरा प्रकार.

पदांस सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितल्या पदांचे मूळ प्रकाशक सम छंद करावे, नंतर तीं  
प्रत्येक पदे वेगळाले अंदास्यळीचे संख्ये इनके घातापर्यंत वाढवावीं,  
आणि त्यांस सम छंद मूळ प्रकाशक करावा.

### उदाहरणे.

(१) (अ+क्ष) आणि (ब+क) हे यांस सममूळ प्रकाशक रूप दे.

$\frac{१}{२}$  आणि  $\frac{१}{३}$  =  $\frac{३}{६}$  आणि  $\frac{२}{३}$  याज करिता, (अ+क्ष)  $\frac{३}{६}$ , (ब+क)  $\frac{२}{३}$

(२) अ आणि ब हे यांस सममूळ प्रकाशक रूप दे.

उत्तर, (अ)  $\frac{१}{२}$ , (ब)  $\frac{१}{३}$  हे अ. ध. अ. ध. ब.

सांगितले सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचे आहे तर पदांचे मूळ  
प्रकाशक सांगितले प्रकाशकाने भागावे. सगळे ते वेगळाले भागा  
कार त्या पदांचे नवे नवे मूळ प्रकाशक होतील. नंतर त्यांस सांगित  
ला मूळ प्रकाशक लिहावा.

### उदाहरणे.

(१) अ आणि क हे यांस  $\frac{१}{२}$  हा सममूळ प्रकाशक कर.

$\frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = \frac{१}{२} \times \frac{२}{१} = \frac{२}{२}$  } उत्तर, (अ)  $\frac{२}{२}$  हे, (क)  $\frac{१}{२}$  हे

$\frac{१}{३} \div \frac{१}{२} = \frac{१}{३} \times \frac{२}{१} = \frac{२}{३}$

## तिसरा प्रकार.

करणी पदांस अति सरळ रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितले पदांचे गुण्य गुणक रूप दोन अवयव करावे. अ  
हो की, त्यांतील एक अवयवाचे मूळ निघेल, नंतर त्या मूळास ती दुस

रा अवयव जोड़न लिहावा.

### उदाहरणें.

(१) २५४ या करणीस अतिसर  
रूप दे.

$$२५४ = २५२ \times २ = २५२ \text{ हेतु.}$$

(२) २५४ या करणीस अतिसर  
रूप दे.

$$२५४ = २५२ \times २ = २५२ \text{ हेतु.}$$

**प्रथम टीप.** जेदां कोणतें ही पद करणीस मागे जोडले आहे तेदां त्यास करणीपदाचे अवयवां पैकीं जें पद करणीतून मुक्त होऊन येईल, त्याणें गुणून लिहावें. आणि त्यास तो करणी अवयव जोडून लिहावा.

### उदाहरण.

२अ२१२८ या करणीस अतिसर रूप दे.

$$२अ२१२८ = २अ२१२८ \times २ = २अ२१२८ \times २ = २अ२१२८ \text{ हेतु.}$$

**दुसरी टीप.** अपूर्ण करणीस अतिसर रूप द्यावयाचें. तर, करणीपदाचे छेद पूर्ण घात होतील, अशा पदानें करणीपदाचे अंश आणि छेद यांस गुणावें. नंतर छेदांचें मूळ काढून तें छेदरूपानें दुसऱ्या अवयवास जोडून लिहावें.

### उदाहरण.

३५४ या करणीस अतिसर रूप दे.

$$३५४ = ३५२ \times २ = ३५२ \times २ = ३५२ \text{ हेतु.}$$

$$(अ+क्ष) \sqrt{\frac{१}{अ+क्ष} \times \frac{अ+क्ष}{अ+क्ष}} = (अ+क्ष) \sqrt{\frac{अ+क्ष}{अ+क्ष}} = \sqrt{अ+क्ष}$$

नं. जर सांगितले करणी पदाचे मुख्य गुणक दोन अवयवांतून एकाही अवयवाचे मूळ बराबर निघत नाही, तर ती करणी अतिसर रूप आहे. जसे, १२१ यास याहून दुसरें सरूप देतां येणार नाही.

### चवथा प्रकार.

करणी पदांची मिळवणी करावयाची.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास सममूळ प्रकाशाक रूपरे  
ऊन एक जातीची करावी, नंतर अतिसरळ रूप द्यावे. करणीतील अ  
वयव एक असल्यास सर्व अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन, त्यावेर  
जेस तो करणी अवयव जोडून लिहावा.

### उदाहरणे.

(१) ३११० आणि  $\frac{३}{४}$  यांची बेरीज काय होते?

$$\begin{aligned} ३११० &= ३१६४२ = ९१२ \quad \left. \begin{aligned} ९१२ + \frac{३}{४} &= (९१ + \frac{३}{४}) \times १२ = \\ \frac{३}{४} &= \frac{३}{४} \times १२ = ९ \end{aligned} \right\} \frac{३९}{४} \times १२ \text{ हे उत्तर.} \end{aligned}$$

(२)  $\frac{३}{४}$  आणि  $\frac{३}{४}$  यांची बेरीज काय होते.

$$\text{उत्तर } \frac{३}{४} \times १२ + \frac{३}{४} \times १२$$

### पांचवा प्रकार.

करणी पदांची वजाबाकी करावयाची.

रीति. पूर्व प्रकाराप्रमाणे दोनही पदे तयार करावी. नंतर करणी  
अवयव एक असल्यास अखंड अवयवांची वजाबाकी करून, त्या  
सकलणी अवयव जोडून लिहावा. आणि करणी अवयव एक न  
सल्यास उणे चिन्ह जोडून लिहावे.

### उदाहरणे.

(१) ११४७ आणि ११२ यांची वजाबाकी कर.

$$\begin{aligned} ११४७ &= १२४४३ = ७१३ \quad \left. \begin{aligned} ७१३ - ११२ &= ६०१ \text{ हे उत्तर} \end{aligned} \right\} \\ ११२ &= १२४३ = २४३ \end{aligned}$$

(२)  $\sqrt{36}$  आणि  $\sqrt{36}$  यांची वजाबाकी कर.

उत्तर,  $\frac{36}{36} = 1$

### सहावा प्रकार.

करणी पदे परस्पर गुणावयाचा.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास एक जातीची करावी. नंतर अव्यंज अवयवांचा गुणाकार करावा. तसा स्वंज अवयवांचा गुणाकार करावा आणि मध्ये करणी जोडावी. नंतर त्यात होईल तर अति सरळ रूप द्यावे.

### उदाहरणे.

(१)  $\sqrt{4}$  आणि  $\sqrt{9}$  यांचा गुणाकार कर.

$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$  हे उत्तर.

(२)  $(\sqrt{4} + \sqrt{9})$  आणि  $(\sqrt{4} - \sqrt{9})$  यांचा गुणाकार कर.

उत्तर,  $(4 - 9) = -5$

(३)  $\sqrt{2}$  आणि  $\sqrt{2}$  यांचा गुणाकार कर.

उत्तर,  $2$

### सातवा प्रकार.

करणी पदांचा भागाकार करावयाचा.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास एक जातीची करावी, नंतर अव्यंज अवयवांचा भागाकार करावा. तसा स्वंज अवयवांचा भागाकार करावा. आणि मध्ये साधारण करणी जोडून लिहावी. नंतर होईल तर अति सरळ रूप द्यावे.

### उदाहरणे.



(१)  $१६\sqrt{२१६}$  यांस  $३\sqrt{१२}$  यांणी भाग.

$$\frac{१६\sqrt{२१६}}{३\sqrt{१२}} = \frac{१६}{३} \sqrt{\frac{२१६}{१२}} = \frac{१६}{३} \sqrt{१८} = १६\sqrt{२} \text{ हें उत्तर.}$$

(२)  $\sqrt{अ-ब}$  यांस  $\sqrt{अ-ब}$  यांणी भाग.

उत्तर,  $\sqrt{अ+ब}(\sqrt{अ-ब})$

**टीप.** करणीचा भागाकार भाज्य भाजकाचे मूळ प्रकाशक चिन्हाचे बजावाकी वरून होतो. यावरून निश्चयकळते की, कोणतेही अपूर्णाकाचे अथवा अपूर्णबीजाचे छेद अंशस्थळी घेता येतील. अथवा अंश छेदस्थळी घेता येतील. असे की, प्रकाशकचिन्ह धन असेल तर कण आणि कण असेल तर धन असे बदल करून पुनः  $\frac{अ}{अ-ब} = १$  अथवा  $\frac{अ-ब}{अ-ब} = १$  अंशपासून निघते की, हे अक्षरचिन्ह कोणतेही एक पदाबराबर आहे, जें पद एक या संख्ये बराबर आहे. याजकरिता जास्थळी अंश शीतीचे अक्षरचिन्ह येतें, तेथें १ हा अंक लिहिता येईल.

### उदाहरणे

(१)  $\sqrt{अ} = \frac{अ}{\sqrt{अ}}$  अथवा  $\frac{अ}{\sqrt{अ}}$  आणि  $\frac{अ}{\sqrt{अ}} = \frac{अ}{\sqrt{अ}}$

(२)  $\sqrt{अ-ब} = \frac{अ-ब}{\sqrt{अ-ब}}$  आणि  $\frac{अ-ब}{\sqrt{अ-ब}} = \frac{अ-ब}{\sqrt{अ-ब}}$

(३)  $\sqrt{अ+ब}$  आणि  $\sqrt{अ-ब}$  यांची प्रकाशकचिन्हे बदल करून लिही. उत्तर,  $\sqrt{अ+ब}$ ,  $\frac{अ}{\sqrt{अ+ब}}$  अथवा  $\frac{अ-ब}{\sqrt{अ+ब}}$  अथवा  $\frac{अ-ब}{\sqrt{अ+ब}}$

### आठवा प्रकार.

करणी पदास वर्गाघनादिकें करून वाढवावयाचा.

**रीति.** जेव्हां करणी पद एकाकी आहे, तेव्हां करणी पदाचें प्रकाशकचिन्ह सांगितले वर्गादिप्रकाशकानें गुणवें. हें करणीचे खंड अ



वयवांचें वर्गघनादि होईल. नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गघनादिकरून तें त्यास जोडावें. जर करणी संयुक्त आहे, तर तें पद संयुक्त पदाचें वर्गघनादिकरावयाचें रीतीनें वाढवावें.

### उदाहरणे.

- |                                       |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|
| (१) $६\sqrt{३}$ यांचा घन काय होतो?    | (२) $२\sqrt{५}$ यांचा पदवा |
| (३) $६\sqrt{३}$ असें उत्तर.           | तकाय होतो?                 |
| (४) $१६\sqrt{५}$ यांचा वर्ग काय होतो? | उत्तर, $१६\sqrt{५}$        |
| उत्तर, $१६-२\sqrt{५}$                 |                            |

### नववा प्रकार.

करणी पदाचें वर्गादिमूळ काढावा.

रीति. जेव्हां करणी पद एकाकी आहे, तेव्हां त्याचें मकाशकानें सांगितल्या मूळ मकाशकानें भागावें आणि करणीत अखंड अवयव असल्यास त्याचें मूळ रीती ममाणें काढून त्यास जोडावें. जर करणी संयुक्त आहे, तर पूर्वी सांगितले रीतीनें त्याचें वर्गादिमूळ काढावें.

### उदाहरणे.

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| (१) $६\sqrt{३}$ यांचें घनमूळ काढ.                    | (२) $३\sqrt{५}$ यांचें पंचघातमूळ     |
| (३) $६\sqrt{३} \times १६\sqrt{५} = ९६\sqrt{१५}$ काढ. |                                      |
| हें उत्तर.   | (४) $१६\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ. |

+ कोणतेही पद (अ) याने (म) घाताचें (न) मूळ = असें अथवा (म) मूळाचें (न) मूळ = असें असोवें. या पासून कळतें की, कोणतेही पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ त्या पदाचे चतुर्थांश मूळा बरोबर आहे. आणि वर्गमूळाचे घनमूळ पद घातमूळा बरोबर आहे.

## दहावा प्रकार.

द्वियुक् पदास सामान्य करणी रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितले द्वियुक् पद त्यांतील करणीचे घातापर्यंत वाढवावे. नंतर त्या घाताचे मूळचिन्ह त्यास जोडून लिहावे. ह्मणजे सामान्य करणी रूप झाले.

## उदाहरणे.

(१)  $\sqrt{2}-1$  यास सामान्य करणी रूप दे.

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \text{ हे उत्तर.}$$

(२)  $\sqrt{5}-2$  यास सामान्य करणी रूप दे.

(२) अ-  $\sqrt{5}$  आणि  $2+\sqrt{5}$

यास सामान्य करणी रूप दे.

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)(2+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+2)(2-\sqrt{5})}}$$

## अकरावा प्रकार.

द्वियुक् पदाचे अथवा धनर्ण पदाचे वर्गमूळ काढावयाचा.

रीति. खालचे सारणी कोष्टकांतील अक्षरस्थानी सांगितले करणीचे दोन अवयव लिहावे. ह्मणजे सांगितले पदांचे मूळ होईल. करणी धनर्ण पद असल्यास खालचेचिन्ह घ्यावे.

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a+x}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-y}{2}}$$

+ चिन्हांत आणकी, कोणतेही दोन पदांचे बेरजेचे वर्गमूळ  $a+b$  आणि वजाबाकीचे वर्गमूळ  $a-b$  आहे. याजकरिता  $a = \frac{a+x}{2} + \frac{a-y}{2}$  यात पूर्वे दोन सवीकर

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a+y}{2} \text{ पथम बहुसरेपाचा}$$

$$\frac{a-x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ गुणाकार करून}$$

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a-y}{2}$$

पथम बहुसरेपाचा वर्ग करून.

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

$$\frac{a-x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ करून}$$

$$2x = 2y - 2y$$

आणि वजा

गुणाकार मिळवून वजा करून

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

$$\frac{a-x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

$$\frac{a-x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a-y}{2} \text{ वेरीज}$$

## उदाहरणें

(१)  $३+१८$  याचें वर्गमूळ काढ.

$$\sqrt{३+१८} = \sqrt{३+३\sqrt{६-६}} + \sqrt{३-३\sqrt{६-६}} = १२+११ \text{ हें उत्तर.}$$

(२)  $७-१४९$  याचें वर्गमूळ काढ.

$$\sqrt{७-१४९} = \sqrt{३+३\sqrt{४९-४९}} - \sqrt{३-३\sqrt{४९-४९}} = ३-३\sqrt{१०} \text{ हें उत्तर.}$$

(३)  $६ \pm ४\sqrt{२}$  याचें वर्गमूळ काढ.

## बारावा प्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढावयाचा असा कीं, जाचें करणी द्वियुक्पदगुणिलें असतां, त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड होईल. रीति. जेव्हां करणीचे एकपदाचा किंवा दोनही पदांचे मूळ प्रकाशक सम आहोत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनार्णप दाचें एकचिन्ह बदल करावें. ह्मणजे तो गुणक होईल. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद गुणावें. याप्रमाणें गुणाकारांत ही एकचिन्ह बदल करून पुनः पुन्हा गुणावें. गुणाकारास करणीरूप सादें पर्यंत. या रीतीनें त्रियुक्पद करणीस एकचिन्ह, चतुर्भुक्पद करणीस दोन, पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हे बदल करावी. याप्रमाणें पुढेंही. जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळ प्रकाशक विषम आहोत तेव्हां, त्या द्वियुक्पदास जितका घात मूळ प्रकाशक असेल त्यात एक कमी इतका त्या द्वियुक्पदाचा घात करावा. म त्यातील वेळा प्रकाशक न लिहितां दुसरे, तिसरे, सहावे, इ. पदांचीं चिन्हे बदल करून लिहावीं. ह्मणजे तो गुणक होईल.

$$\begin{aligned} २५+५ &= \sqrt{५+५} = \sqrt{३५+३\sqrt{५-५}} + \sqrt{३५+३\sqrt{५-५}} \\ २५-५ &= \sqrt{५-५} = \sqrt{३५+३\sqrt{५-५}} - \sqrt{३५-३\sqrt{५-५}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} २५+५ &= \sqrt{५+५} \\ २५-५ &= \sqrt{५-५} \end{aligned}} \right\} \text{हें सिद्ध.}$$

$$(8 + \sqrt{99}) \times (8 - \sqrt{99}) = 60$$

उत्तर, ९-११ हागु.

उत्तर,  $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})$  गु०

(३) ३+५१० याचा एक गुणक काढ

उत्तर १-३५१०+३५१०० यु०

(१४) ५अ-५व याचा एक गुणक काढ

उच्चार, ५ अ + ५ ओ + ५ ऐ + ५ औ

लेखा प्रकार

जाअपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी अथवा संयुक्त करणी आहे  
त त्यांस बदल असं उद्भव घ्यावयाचा

रीति जेव्हा अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी करणा आहेत, तेव्हा त्यांचा पूर्ण घात होण्या सार्वी जितका गुणक योग्य आहे, तितका अंश छेदांस लागवा. सणजे अखंड छेद रूप होईल.

जेव्हा अपूर्ण बीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत तेव्हा वाराचे  
प्रकाराप्रमाणे गुणक काढावा. असा की, जाणें छेद गुणिले अस  
तां त्यांचें करणी रूप जाऊन ते अखंड होतील. नंतर त्याणें अंश  
छेद गुणिले व अखंड झालें रूप होईल.

## उदाहरणें



(१) जै आणि गणना यांस बदल अखंड छेदरूपदे.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{3} - \sqrt{1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(२) यं अखंड छेदरूपदे.

उत्तर,  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

(३)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

## गणितप्रमाणआणिश्रेढी.

गणित प्रमाण एक जातीचे दोन पदांचे वजावाकीवरून त्याचे संबंधी आहे. या वजावाकीस गणित प्रमाणांत उत्तर श्रृंखलात जेव्हां पहिलें आणि दुसरें यांचें उत्तर, तिसरें आणि चवथें यांचे उत्तराबरोबर आहे, तेव्हां तीं चार पदे प्रमाणांत आहेत. जसे १, २, ३, ४ अथवा अ, अ+क, व, व+क

कित्येक पदे एकाच उत्तराने चढती किंवा उतरती असली, अणजे त्यांस गणित श्रेढी ह्मणार्हे. जसे,

अ, अ+क, अ+२क, अ+३क, अ+४क, अ+५क, इत्यादि  
म-४ड, म-३ड, म-२ड, म-ड, म, म+ड, म+२ड, म+३ड, म+४ड, म+५ड इत्यादि.

गणित श्रेढीतील सुरवात अवयव. अतिलक्षणपद = अ, अतिमोठें पद = ज्ञ, उत्तर = ड, गट = न, सर्वधन = स

मांजून कोणतेही तीन सांगितले असता त्यांचा आधाराने बाकीचे अवयव निघतील. पुढील कोष्टकां प्रमाणे.

+ गणितश्रेढी संबंधी अनेक विचार दुसरे भाग लिहिजे आहेत ते पहा.



$$अ = ज - उ(न-१) = \frac{२स - नउ}{२} = \frac{२स - उ(न-१)न}{२न}$$

$$ज = अ + उ(न-१) = \frac{स}{न} + \frac{उ}{२}(न-१) = \frac{२स - अन}{२}$$

$$उ = \frac{ज - अ}{न-१} = \frac{२(नज - स)}{न(न-१)} = \frac{२(स - अन)}{न(न-१)}$$

$$न = \frac{ज - अ + उ}{उ} = \frac{२स}{अ + ज} = \sqrt{\frac{२स + २(२अ - उ)}{२}} = \frac{२(अ + उ)}{२}$$

$$स = (अ + ज)देन = (ज - उ(न-१))न = (अ + \frac{उ}{२}(न-१))न$$

### उदाहरणें

(१) एका दुकान दाराने ७ बुकें विकलीं, त्याचा किंमती गणित श्रेणींत होला. अशा कीं, प्रथम दुकाने किंमती पेशां दुसरे बुकाची किंमत ४ शिलिंग अधिक होती, आणि सर्वोत्तम मर्याद होतें त्याची किंमत २५ शिलिंग होती. तेव्हां प्रत्येक बुकाची किंमत काय व एकंदर बुकांची किंमत काय?

$$अ = ज - उ(न-१) = २५ - ४(७-१) = १ आदिपद$$

$$स = (अ + ज)देन = (१ + २५)३ = ९१ सर्वधन$$

उत्तर { प्रत्येक किंमत १, ५, ९, १३, १७, २१, २५  
एक किंमत ९१ शिलिंग

(२) एक गणित श्रेणीमध्ये गण्य १०० उत्तर आणि सर्वधन ९९९ त्या श्रेणीची आद्यंत पदे कोणतीं?

$$अ = \frac{२स - उ(न-१)न}{२न} = \frac{२(९९९) - १(१००-१)१००}{२(१००)} = १ आदिपद$$

$$ज = \frac{स}{न} + \frac{उ}{२}(न-१) = \frac{९९९}{१००} + \frac{१}{२}(१००-१) = १०० मोठें पद$$

(३) ४५१ इंच उंचीचा एका खांब्यावर एक किडा चढत आहे. त्या स पहिले उडीस १ इंच व दोन उडीस ४१ इंच मजल मारत वयास गणित प्रमाणाने किती उत्तराने किती उड्या माराव्या लागतील?

$$n = \frac{35}{2} = 17.5 \text{ उड्या (गळ) आणि } d = \frac{35-1}{2} = 17 \text{ उत्तर}$$

उत्तर } विद्याउत्तराने २१ उड्या माराव्या लागतील.

## समाकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशीचे गणित व्याख्या

१ तोफेचे गोळ्यांचा राशी बघून करून तीन प्रकारे करितात. सापायांचा आकृती बघून भावें होतात. ती. त्रिकोण, चौरस आणि काटकोन चौकोन.



गोळ्यांचे धर एकावर एक रचिल्या पासून या राशी होतात. पायापासून प्रति धराची रांग एक एक गोळ्याने उणी होत जाते. त्रिकोण व चौरस राशीचे शिरावर एक एक गोळा असतो आणि पायांनील लांबी बाजूचे एके ओळीतील गोळ्यांत, रुंदी बाजूतील एके ओळीचे गोळे बजाकरून बाकी रहातील त्याहून एक अधिक इतके काटकोन चौकोन राशीचे शिरावर गोळे असतात. त्रिकोण आणि चौरस राशी मध्ये बाजू अथवा मुखें सम बाजू त्रिकोण आणि त्यांतील गोळे गणित श्रेढीत आहेत. जीचे प्रथम पद एक, शेवटील पद आणि गळ ही परस्परमेद्वत की आहेत आणि

त्रात्रिकोणास गणित त्रिकोण ह्यणतात. अबक प्रथम आकृती तील आणि इफ गह दुसरे आकृती तील हे गणित त्रिकोण आहेत.

३ चौरस राशीचे मुखावर गणित त्रिकोण ठेविल्या पासून काढकोन चौकोन राशी उसन होते.

४ अबकड प्रथम आकृति त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथ करण - सांगितल्या राशींत गोळ्यांचे धर ६ आहेत आणि त्या प्रत्येकांतील गोळे गणित श्रेढी असून, प्रत्येक धर सम बाजू त्रिकोण आहेत. याज करिता, प्रथम ह्यणजे खालचे धरांतील गोळ्यांची संख्या =

$$(६+१) \times ३ = २१ \quad \text{चवथे} = (३+१) \times ३ = ६$$

$$\text{दुसरे} = (५+१) \times ३ = १५ \quad \text{पांचवे} = (२+१) \times १ = ३$$

$$\text{तिसरे} = (४+१) \times ३ = १० \quad \text{सहावे} = (१+१) \times ३ = ३$$

सांगितले राशींतील सर्व गोळे ५६

५ इफ गह दुसरे चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथ करण - सांगितल्या राशींत गोळ्यांचे धर सहा आहेत. याज करिता,  $६ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = २१$  त्या राशींतील सर्व गोळे.

६ अबकड इफ तिसरे काढकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे? जीन वफ = १० आणि वक = ६

पृथ करण - इडिली काढकोन चौकोन राशी ही, अबकड चौरस राशी आणि चार गणित त्रिकोण मिळून झाली आहे. याज करिता,

चौरस राशींतील गोळे

$$= १५$$

चार गणित त्रिकोणांतील गोळे = ८४

काटकोन चौकोन राशींतील गोळे = १४०

### पहिली टीप.

या पुढील कोष्टका पासून त्रिकोण आणि चौरस राशी व त्यांचे प्रत्येक थर यांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढता येईल. अ कोष्टक स्वालचे थराचे गोळे एका पासून चाळीस पर्यंत दाखवितो. ब कोष्टक प्रत्येक त्रिकोण थरांतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो. क कोष्टक त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो. ड कोष्टक चौरस राशींतील प्रत्येक थराचे गोळे दाखवितो. आणि ई कोष्टक चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

या कोष्टका पासून काटकोन चौकोन राशींतील गोळे थोडक्यांत कळतील. जात पायाचे थराचे रुंदी बाजूंतील एके रांगेचे गोळे चाळी सां पैक्षां अधिक नसावे. तसेल हान आणि मोठे बाजूंतील एके क रांगेचे गोळ्यांची वजाबाकी चाळीसां हून अधिक नसावी. काटकोन चौकोन राशी चौरस राशीवर गणित त्रिकोण ठेविल्या पासून झाली आहे. याज करितां चौरस राशीचे गोळे ई कोष्टका पासून घ्यावे, आणि एक गणित त्रिकोणाचे गोळे ब कोष्टका पासून घेऊन त्यांस गणित त्रिकोणाचे संख्येनें गुणून त्यां त चौरसाचे गोळे मिळवावे. म्हणजे काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या होईल.



[illegible]



## उदाहरणें.

(१) एके त्रिकोण राशींत १५ गोळे आहेत. त्या राशीतील एकंदर गोळे किती?

अ कोष्टकांत १५ चे समोर क कोष्टकांतील ६८० गोळे हे उत्तर.

(२) एक चौरस राशींत खालचे थरांत १५ गोळे आहेत. त्या राशीतील एकंदर गोळे किती?

अ कोष्टकांतील १५ चे समोर ई कोष्टकांतील १२४० गोळे हे उत्तर.

(३) काटकोन चौकोन राशींत रुंदी बाजूचे एके रांगेत १५ गोळे आणि शिखर १२ गोळे आहेत, त्या राशीतील एकंदर गोळे किती?

चौरस राशीतील गोळे ..... १२४०

११ गणित त्रिकोणाचे गोळे ..... १३२०

एकंदर का. चौ. राशीतील गोळे २५६० हे उत्तर.

## दुसरी टीप.

पुढील सारणी कोष्टका पासून तीनही राशीतील गोळ्यांचा संख्या निघतात.

त्रिकोण राशीतील गोळे =  $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$

चौरस राशीतील गोळे =  $\frac{(2n+1)(n+1)n}{2}$

का. चौ. राशीतील गोळे =  $\frac{(2n+1+1)n(n+1)}{2}$

यांत न = थरा संख्या, म = का. चौ. राशीतील एकोन शिखरचे गोळे.

## या कोष्टकाची उपपत्ति.

अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादी कोणत्याही श्रेढीची न पदां पर्यंतचे

रीज करणें तर.

सागील पद पुढील पदांत बजा करून अंतरें घेतलीं आणि या अंतरांची पुनः पुन्हा अंतरें घेतलीं तर, पुढें लिहिल्या ममाणें श्रेणीची तील  
 ब-अ, क-ब, ड-क, ई-ड, फ-ई इत्यादि मथम अंतर परंपरा:  
 क-२ब+अ, ड-३क+ब, ई-४ड+क, फ-५ई+ड, इ-६दु+अं. प.  
 ड-३क+३ब-अ, ई-३ड+३क-ब, फ-३ई+३ड-क, इ-३दु+३अं. प.  
 ई-४ड+४क-४ब+अ, फ-४ई+४ड-४क+ब, इ-४दु+४अं. प.  
 फ-५ई+५ड-५क+५ब-अ, इ-५दु+५अं. प.

यावरून समजवें कीं, नव्या अंतर परंपरेन अ, ब, क, ड, इ. पदांस वेळा प्रकाशक कोणत्याही द्वियुक् पदां तील (न) घाताचा वेळा प्रकाशका बरोबर आहेत यांत मथम दुसरी, तिसरी इ. परंपरांचीं मथम पदें दाखवायास पं, पै, पी, पौ, पु, इ. मिहें घेतलीं असतां पं = ब-अ, पै = क-२ब+अ, पी = ड-३क+३ब-अ इत्यादि स्थळांक. ब = अ+पं. क = २ब-अ+पै

ड = ३क-३ब+अ+पै. ई = ४ड-४क+४ब-अ+पै  
 फ = ५ई-५ड+५क-५ब+अ+पै = अ+५पं+१०पै+१०पी+५पौ+५पु

यावरून स्पष्ट आहे कीं, श्रेणीचा (न+१) व्या पदांत अ, पं, पै, पी, इ. पदांचे वेळा प्रकाशक कोणत्याही द्वियुक् पदां तील न घाताचे वेळा प्रकाशकाचे बरोबर आहेत.

यांत दोनही पेट्यांत अ मिळवून वेरीज.

अ+ब+क+ड+ई+फ+इ. = ६अ+१५पं+२०पै+१०पी+६पौ+५पु  
 यांत स्पष्ट आहे कीं, शेरी तील न पदाचा वेरीजेंत अ, पं, पै, पी, इ.

पदां सवेला प्रकाशक अनुक्रममें कोणत्याही द्वियुक्पदाचा नवा  
तांतील दुसऱ्या पदापासूनचा वेला प्रकाशकाबराबर होतील.

यास्तव अ + व + क + इ = न पदे = न अ + न.  $\frac{n-1}{2}$  + न.  $\frac{n-1}{2}$ .  
 $\frac{n-1}{2}$  + न.  $\frac{n-1}{2}$ .  $\frac{n-1}{2}$ .  $\frac{n-1}{2}$  + इ. सर्वधन अथवा बेरीज.  
 यांत संबंधनियामक न + न.  $\frac{n-1}{2}$  + न.  $\frac{n-1}{2}$ .  $\frac{n-1}{2}$  + न.  $\frac{n-1}{2}$ .  $\frac{n-1}{2}$ .  
 $\frac{n-1}{2}$  + इ. हा आहे.

आतां त्रिकोण राशींतील थरांचे गोळे खाळां लिहिता येतील  
त आहेत. याजकरितां न थरांपर्यंत गोळे किती आहेत?

१, ३, ६, १०, १५, २१ इ. मूळ श्रेणी

२, ३, ४, ५, ६ मध्यम अंतर परंपरा

१, १, १, १, १ दुसरी अंतर परंपरा

०, ०, ० तिसरी अंतर परंपरा

यांत, प = २ प = १ प = ० याजकरितां न + २न.  $\frac{n-1}{2}$  + न.  $\frac{n-1}{2}$ .  
 $\frac{n-1}{2}$  हे सर्वधन. यांत पदांस समच्छेद करून,  $\frac{n-1}{2}$  +  $\frac{n-1}{2}$  (न-१)  
 +  $\frac{n-1}{2}$  (न-१) (न-२); साधारण गुणक काढून,  $\frac{n-1}{2}$  (६ + ६ (न-१) +  
 (न-१) (न-२)) = प्रत्यक्ष गुणून,  $\frac{n-1}{2}$  (६ + ६न - ६ + न - ३न + २)  
 गुण्यगुणक अवयव करून  $\frac{(न+३)(न-१)}{२}$  हा त्रिकोण राशी  
 चा कोष्टक हे सिद्ध.

चौरस राशींतील थरांचे गोळे १, ४, ९, १६, २५ इ. श्रेणीत आ  
हेत. याजकरितां न थरांपर्यंत गोळे किती आहेत?

१, ४, ९, १६, २५ इ. मूळ श्रेणी यांत प = २  
 २, ४, ६, ८, १० म. अ. प. प = १  
 २, २, २ इ. अ. प. प = २  
 ०, ०, ० ति. अ. प. प = ०

याजकरितां सर्वगोळे  $n+३n \cdot \frac{n-1}{2} + २n \cdot \frac{(n-1) \cdot n-२}{2}$   
 समष्टेदकरून वसाधा गुणक काढून  $\frac{६+२(३-१)+२(३-१)(३-१)}{२}$   
 प्रत्यक्ष गुणून व बेरीज करून  $\frac{n}{२} (२न+३न+१)$  गुण्यगुणक अवय  
 व करून  $\frac{(२न+१)(न+१)न}{२}$  हावर लिहिलेला चौरसराशीचा कोष्ट  
 कहे सिद्ध.

काढकोनची कोनराशीतील गोळे जीत रुंदी वाजून एके ओळीत  
 न गोळे आहेत आणि म गणितत्रिकोण, म्हणजे एकौन शिरावर  
 चे गोळे आहेत.

आतां  $\frac{(२न+१)(न+१)न}{२}$  चौरसराशीप्रमाणे

$\frac{n+n}{२}$  एक गणितत्रिकोणांतील गोळे, यां समनें गुणून,  
 $\frac{nम+nम}{२}$  म गणितत्रिकोणांतील गोळे. दोहोंची बेरीज

घेऊन,  $\frac{(२न+१)(न+१)न}{२} + \frac{nम+nम}{२}$  सर्वका चौराशीतील गोळे.  
 समष्टेदकरून व गुणक काढून  $\frac{(२न+१)(न+१)न}{२} + \frac{nम+nम}{२} =$   
 $\frac{n}{२} (२न+१)(न+१) + ३मन+३म$

प्रत्यक्ष गुणून  $\frac{n}{२} (२न+३न+३मन+३म+१) = \frac{n}{२} (२न+३न+३म)(न+१) =$   
 $\frac{(२न+३म)(न+१)न}{२}$  हावर लिहिलेला काढकोन राशीचा सारणी  
 कोष्टक हे सिद्ध.

### उदाहरणे

(१) जिवे सालचे धरांतील एके ओळीत २० गोळे आहेत, त्याचि राशीतील गोळ्यांची संख्या काय होईल?  
 $\frac{२० \times २१ \times २२}{६} = १५४०$  हे उत्तर.

(२) जिवे सालचे धराचे एके ओळीत २० गोळे आहेत, त्याचि राशीतील गोळ्यांची संख्या काय होईल?  
 $\frac{२१ \times २२ \times २३}{६} = २०७०$  हे उत्तर.



(३) एकाकाटकोन चौकोन राशींत थरांची संख्या २० आणि शि  
रावर १ गोळे आहेत. त्या राशीतील एकंदर गोळे किती होतील?  
 $(1+24) \times 20 \div 2 = 250$  हें उत्तर.

### तिसरी टीप.

एकसंगमरीति अशी आहे की, जिणें तीनही राशीतील गोळे  
त्यरेने निघतात.

त्रिकोण राशीतील (बड+अ+क) ३ बडक

चौरस राशीतील (ईफ+ईफ+ग) ३ गफह

का. चौ. राशीतील (बफ+बफ+अई) ३ अबक

या याचे लांबी बाजूतील एके ओळीचे गोळे, आणि तिशीं समां  
तर दुसरे एके ओळीचे गोळे एक किंवा अनेक असतील ते, व  
शिवावरील गोळे, तीनही एकत्र करून, त्यांस रुंदी बाजूतील  
एका गणित त्रिकोणाचा गोळ्यांचा एक त्रुति यांशानें गुणावें, तो  
गुणाकार राशीतील गोळे होतील.

+ ही रीति दुसरे येथीत सिद्ध केले कोष्टका पासून उत्तम होते.

१ त्रिकोण राशीचा कोष्टक  $\frac{(1+24)(20+1)}{2} = \frac{(25)(21)}{2} = (25 \times 11) = 275$

यांत न = ईफ, १ = ग आणि  $\frac{20+1}{2} = 10.5$  बाजू न = बड,

१ = अ, १ = क आणि  $\frac{20+1}{2} = 10.5$  बाजू क = बडक, बाजू करिता (बड+अ+क) ३ बडक  
हें सिद्ध.

२ चौरस राशीचा कोष्टक  $\frac{(24+1)(20+1)}{2} = \frac{(25)(21)}{2} = (25 \times 11) = 275$

यांत न = ईफ, १ = ग आणि  $\frac{20+1}{2} = 10.5$  बाजू न = गफह, बाजू करिता (न+न+१)  $\frac{20+1}{2} =$

(ईफ+ईफ+ग) ३ गफह हें सिद्ध.

३ का. चौ. राशीचा कोष्टक  $\frac{(24+1)(20+1)}{2} = \frac{(25)(21)}{2} = (25 \times 11) = 275$

न = रुंदी बाजूतील एके रांगेचे गोळे, म = एकोन शिवावरचे गोळे आणि वरील  
निघमायमाणे लांबी बाजू = रुंदी बाजू + एकोन शिवावरचे गोळे. सुपून लांबी  
बाजू = न+म आणि २ लांबी = २न+२म = बफ+बफ आणि म+१ =



## उदाहरणें.

(१) एककाट कोन चौकोन राशी आहे, तिचे शिरावर ११ गोळे आणि लांबी बाजुंत २५ गोळे आहेत. तेव्हां त्या राशींत गोळे किती?  
 $(११ + २५ + १) \times १० = ३४६०$  गोळे हे उत्तर.

(२) जर चौरस आणि त्रिकोण राशीतील खालचे थराचे एके ओळीतील प्रत्येकीं २५ गोळे आहेत. त्या राशींत किती किती गोळे आहेत?

चौरस: त्रिकोण

उत्तर, ५५२५ , २९२५

## भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.

भूमितिप्रमाण म्हणजे एकपद दुसरे पदाचा काय भाव अथवा काय गुणक आहे, असा विचार करितां पदसंबंधी आहे.

घेतले दोन पदांतील प्रथम पदास अग्रसर आणि दुसरे पदास उपाग्रसर म्हणतात. आणि त्यांचे भागाकारास गुणोत्तर म्हणतात.

जेव्हा दोन युग्मांचे गुणोत्तर बराबर आहे, तेव्हा तीं चार पदे प्रमाणांत आहेत. जसे, अ:ब::ब:ब अथवा ३:७::९:२१

कारण  $\frac{३}{७} = \frac{३}{७}$  आणि  $\frac{३}{७} = \frac{३}{७}$

## सिद्धांत.

(१) जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा आद्यंताचा गुणकार मध्य पदाचे गुणाकाराबरोबर आहे. जसे, अ:ब::क:ड  
 शिरावरचे गोळे = अड आणि मध्य = बक या अकरितां (बक + अड + अड) हे अवक हे सिद्ध.

अथवा  $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ख}$  या समीकरणस बड में गुणून अउ=बक है सिद्ध  
 कुरलरी अः बः बः क असे असेल तर, ब=अक, व=अख  
 या पासून असे सिद्ध होते कीं, कोणत्याही दोन पदांचे भूमिति  
 मध्यप्रमाण त्या पदांचे गुणाकाराचे वर्गमूलाबराबर आहे  
 (२) जेव्हा चार पदे प्रमाणात आहेत तेव्हा त्यां पासून प्रमाणे हो  
 तात तीं,

- १ समरीतीनें, अ : अर :: ब : बर अथ० ३ : ७ :: ९ : २१
- २ व्यस्तरतीनें, अर : अ :: बर : ब अ० ७ : ३ :: २१ : ९
- ३ परावर्त, अ : ब :: अर : बर अ० ३ : ९ :: ७ : २१
- ४ संयुक्त, अ : अ+अर :: ब : ब+बर अ० ३ : १० :: ९ : ३०
- ५ विभुक्त, अ : अर-अ :: ब : बर-ब अ० ३ : ४ :: ९ : १२
- ६ मिश्र, अर+अ अर-अ :: बर+ब बर-ब अ० १० : ४ :: ३० : १२
- ७ गुणाकार, अक अरक :: ब : बर अ० ३४९ : ७४९ :: ९ : २१
- ८ भागाकार,  $\frac{अ}{क} : \frac{अर}{क} :: \frac{ब}{ख} : \frac{बर}{ख}$  अ० ३ : ९ :: ७ : २१

जेव्हा श्रेढीतील पदे एकाच गुणोत्तराने बदल किंवा उतरत  
 आहेत, तेव्हा त्यास भूमितिश्रेढी ह्यानें जसे-

१, ३, ९, २७, ८१, २४३ इत्यादि } भूमितिश्रेढी  
 अ, अर, अर, अर, अर, अर इत्यादि }

भूमितिश्रेढीतील मुख्य अवयव अतिशोर्धे पद = अ, अतिक  
 हान पद = अ, गुणोत्तर = र, गळ = न सर्वधन = स

यांतील कोणत्याही एक अवयवाची किमत्त दुसऱ्या तीन अवयवांचे आधाराने खाली लिहिल्या सारणीकें एकामागून मिळते.  
 + कुरलरी शब्दाचा अर्थ पांढऱ्या भागात पहा.

$$अ = \frac{स}{र-१} = स + र(अ-स) = \frac{स(र-१)}{र-१}$$

$$उ = अ \cdot र = \frac{स(र-१)}{र-१} \cdot र = स + \frac{अ \cdot स}{र}$$

$$र = \frac{(अ)उ}{अ} = \frac{अ \cdot स}{अ-स} = \frac{स-अ}{स-उ}$$

$$न = \frac{ला \cdot (अ)}{अ-र} = \frac{ला \cdot र + ला \cdot अ - ला \cdot अ}{अ-र} = \frac{ला \cdot (अ-र)}{अ-र}$$

$$स = \frac{र-१}{र-१} \cdot अ = \frac{र-१}{र-१} \cdot \frac{स}{र-१} = \frac{र-१}{र-१}$$

जेव्हां श्रेढी अनंत आहे, तेव्हां अतिलहान पद अ = ० याजक

$$रितां स = \frac{र-१}{र-१}$$

जेव्हां र सम अपूर्णांक आहे, तेव्हां सर्वधन स =  $\frac{र-१}{र-१}$  अ

जर न अनंत आहे, तर स =  $\frac{अ}{र-१}$

### उदाहरणे.

(१) एका भूमिति श्रेढीचे मध्यम पद १ गुणोत्तर २ आणि गुणोत्तर ३ तिचे सर्वधन काय होईल?

$$स = \frac{र-१}{र-१} \cdot अ = \frac{२-१}{२-१} = २५५ \text{ सर्वधन हे उत्तर.}$$

\* एका भूमिति श्रेढीत (न) पदे आहेत, तर श्रेढीतील पद या ममाणे होईल असे अ, अर, अर<sup>२</sup>, अर<sup>३</sup>, अर<sup>४</sup>, ..... इत्यादि अर<sup>१</sup>, अर<sup>२</sup>, यांत अर<sup>१</sup> हे दोन वेळ पद आहे.

\* एका भूमिति श्रेढीची (न) पदां पर्यंत बेरीज करणे आहे. याजक रितां अ + अर + अर<sup>२</sup> + अर<sup>३</sup> + ..... इ. अर<sup>१</sup> + अर<sup>२</sup> = स या समीकरणाना मध्यम पदास स्थळांक अर + अर<sup>२</sup> + अर<sup>३</sup> + ..... इ. अर<sup>२</sup> + अर<sup>३</sup> = स-अ, रने भागून अ + अर + अर<sup>२</sup> + अर<sup>३</sup> + ..... इ. अर<sup>२</sup> + अर<sup>३</sup> =  $\frac{स-अ}{र}$  हे मध्यम समीकरणांत वजा करून अर<sup>२</sup> = स -  $\frac{स-अ}{र}$  के. सोबत स्थळांक मसामा गु. का. अर<sup>२</sup> = अर - स + अ, स(र-१) = अ(र-१) गु. लो. स = अ  $\left( \frac{र-१}{र-१} \right)$  हे सिद्ध + स =  $\left( \frac{र-१}{र-१} \right)$  अ = यावर सम अपूर्णांक आहे याजक रितां याचा (न) घात एकाहून कमी होऊन र<sup>१</sup> = -क आणि र-१ = -स असे होवें ते व्हा उणी वाकी नर दावी, म्हणून अशा श्रेढीत याचे गुणून स =  $\left( \frac{र-१}{र-१} \right)$  अ हे सिद्ध होवें.

(२)  $\frac{1}{2}$  आणि १२८ यांची तीन भूमितिमध्यप्रमाणे काढ.

एथें आदि, अंत आणि ३ मध्यपदे मिळून एकदर ५ पदे आहेत.  
यांत अतिलहान पद अ =  $\frac{1}{2}$  अति मोठे पद ज = १२८ आणि मळ  
न = ५ आतां ज = अर<sup>३-१</sup> ह्या जे १२८ =  $\frac{1}{2}$  र, छे. सो. र = २५६.  
र = ४ गुणोत्तर, याणें लहान पदास गुणून ३, ८, १२ ही भूमि  
तिमध्य प्रमाणे हें उत्तर.

(३) ९, -६, ४ इत्यां श्रेढीचें १० पदांपर्यंत सर्वधन काय होईल?  
उत्तर,  $\frac{६५०}{२१००}$

(४) एका भाड्यांत दूधोरदूध होते. त्यांतून प्रथम दूधोरदूध  
काढून तितकेंच पाणी घातलें; या प्रमाणें सहा वेळ केलें अस  
तां त्या भाड्यांत दूध किती बोर राहिल?  
उत्तर,  $२\frac{७३}{१०००}$  बोर.

(५)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}$  इ. अनंत पदांपर्यंत श्रेढीचें सर्वधन का  
य होईल?  
उत्तर,  $\frac{१}{३}$

## समीकरण

ज्याख्या

१ समीकरण हा खून बीजगणिताचा एक भाग आहे. जो जय  
क्त पदांचा किंमती, त्यांच्या व्यक्त पदांशी जो संबंध आहे, त्याचे स  
हाच्याने काढायाचा वेगळ्या रीति आहे त्या दारबितो.  
२ किती एक बीजगणित संबंधी उद्देशक बरोबर केला जाय



हैं होतें या बराबर केले उद्देशकांस समीकरण ह्यणतात.

३ आपदापासून समीकरण उत्तम प्रकारें करून बनलें, त्यापदांस समीकरणाचीं पदे ह्यणतात. आणि = याचिन्हाचे दोहोंकडेजे उद्देशक (पदे) लिहिले असतात, त्यांस समीकरणाचा दोन-बाजू ह्यणतात. जसे,  $३६ + २६ = ६२$ .

४ समीकरणांत जाती अथवा नावें, त्यांतील अव्यक्तपदाचे सर्वाहुन मोठे घात येतात त्यावरून तशीं होतात.

नावें

लक्षणे.

उदाहरणें.

एकवर्णसमीकरण. { जांत अव्यक्तपदाचेमो  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ थय घात येतात.

वर्गसमीकरण. { जांत अव्यक्तपदादोन  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ घाताचें अथ. दोन घाता  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ पर्यंत चढतें आहे. }

घनसमीकरण. { जांत अव्यक्तपदातीन  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ घाताचें अथवा तीनघा  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ तांपर्यंत चढतें आहे. }  $६२ + ३७ = ९९$ .

चतुर्घातसमीकरण. { जांत अव्यक्तपदाचार  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ घाताचें अ. चार घाता  $६२ + ३७ = ९९$ .  
{ पर्यंत चढतें आहे. }  $६२ + ३७ = ९९$ .

+ समीकरण तीन प्रकारें आहे. भाराचें, महलाचे आणि किमतीचें. जसे, ५ शेर पदार्थ = पांसीचा दगड, अ. वजन. तसें एक पंच पांसी भर पाणी आणि तीच पंच पांसी भर तूप. तसें ५ शेर युकाची किंमत चार आणि आतां जा समीकरणा विषयी विचार करणें आहे, ते किमतीचें समीकरण.



५ जा समीकरणांत वर्ग, घन, चतुर्घात इ. एकैक माथ येतात त्यां स अनुक्रमें एकाकी वर्ग समीकरण, एकाकी घन समीकरण, एकाकी चतुर्घात समीकरण इ. म्हणतात. जसें वर लिहिले उदाहरणांतील  $x^2 + 5 = 0$ ,  $x^3 = 2$ ,  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$  इत्यादि.

६ जांत वर्ग, घन, चतुर्घात, इ. पर्यंत चढते घात असतात, त्यां स अनुक्रमें संयुक्त वर्ग समीकरण, संयुक्त घन समीकरण, संयुक्त चतुर्घात समीकरण इ. म्हणतात. जसें  $x^2 + 2x = 3$ ,  $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ ,  $x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0$  इत्यादि.

७ समीकरणाचें मूळ अथवा किंमत ती आहे की, जी अव्यक्त पदस्थ कीं ठेविली असता दोनही बाजू बराबर होतील.

दिलेल्या समीकरणांतून अव्यक्त पदाची किंमत काढण्याचा जो मार्ग त्या समीकरणाचें दृढकरण करणें अथवा समीकरण सोडविणें असें म्हणतात.

१ एकवर्ण समीकरण अथवा एकाकी दुसरे कोणतेही विषम घाताचें समीकरण यांस मूळ (किंमत) एक असते, परंतु संयुक्त अनेकवर्ण समीकरणांत अव्यक्त पदाचा जो सर्वां हून मोठा घात प्रकाशक आहे तिची मुकें आहेत जसे,

एकाकी एकवर्ण अथवा अनेकवर्ण समीकरण.

उदाहरणें: किंमत  
 $x^2 + 5 = 0$  .....  $x = 2$   
 $x^3 = 2$  .....  $x = 3$

संयुक्त अनेकवर्ण समीकरण.

उदाहरणें: किंमत  
 $x^2 + 2x = 3$  .....  $x = 2, -4$   
 $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ ,  $x = 2, 3, 0$

## एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाचीरीति.

जात अव्यक्त पद एकच आहे.

समीकरणाचे पृथक्करण करणे, हाणजे त्याचा दुसऱ्या व्यक्त पदांशी जो संबंध आहे, तो सोडवून, अव्यक्त पद एके बाजूस आणि दुसरी व्यक्त पदे एके बाजूस करणे. आणि हे करण्यासाठी वेगळ्या मूल्यसममाणे आणि कृति अवश्य घेतली पाहिजे. ती पुढे लिहितो.

### प्रत्यक्ष प्रमाणे.

१ जर दोन समपदांत एकच पद मध्येकांत मिळविले, तर त्या दोनही बेरजा सम होतील.

२ जर दोन समपदांतून एकच पद मध्येकी बाजू केले, तर त्या दोनही वाक्यासम राहतील.

३ जर दोन समपदांस सारखे गुणक किंवा भाजक लाविले, तर त्यांचे गुणाकार किंवा भागाकार सम होतील.

४ जर दोन समपदांतून एका पदांत कोणी एक पद मिळविले, आणि त्यांतच तेकजा केले, तर समत्व राहील.

५ जर दोन समपदांतून एकास कोणी एक पदाने गुणिले आणि त्या गुणाकारास त्यानेच भागिले, तर समत्व राहील.

६ दोन समपदांचे वर्ग घनादि केले अथवा वर्गादि मूळे काढीली तरी समत्व राहील.

ही सर्व प्रमाणे पुढील प्रकारांवरून उघड होतील.

प्रथम प्रकार.

पदांस स्थळांतर करावयाचा.

रीति. समीकरणाचे कोणतेही पदाचे स्थळांतर (एके बाजूतून दुसरे बाजूत नेणे) त्या पदाचे चिन्ह बदलकल्ल होईल. (प्र० प्र० प्र०)

### उदाहरणे.

(१) क्ष + अ = क मूळ समीकरण. (२) क्ष + २ अक - उ + ५ = ई + ५

स्थळांतर. क्ष = क - अ हे उत्तर. कार मूळ समीकरण.

ण क्ष + अ = क मूळ समीकरण. क्ष = ई + उ - २ अक हे उत्तर.

- अ = - अ (प्र० प्र०)

क्ष = क - अ

### दुसरा प्रकार.

समीकरणांतील अव्यक्त पदांस गुणक किंवा भाजक असेल तो सोडवायाचा.

प्रथमरीति. गुणक सोडविण्या करिता बाकीची सर्व पदे त्या गुणकाने भागावी.

दुसरी रीति. भाजक सोडविण्या करिता बाकीची सर्व पदे त्या भाजकाने गुणावी.

### उदाहरणे.

(१) अक्ष + अ = क

(२)  $\frac{क्ष}{५} + अ = ब$

क्ष + अ =  $\frac{क}{५}$  (प्र० प्र०)

क्ष + अक = बक

क्ष =  $\frac{क}{५} - अ$  हे उत्तर

क्ष = बक - अक = क (ब - अ)

टीप - कोणत्याही समीकरणाची चिन्हे बदलता येतील कारण (प्र० प्र०) त्या समीकरणास -१ याने गुणिले.

\* वाचासुन निघते की, जर दोनही बाजूंस पदे एकसारखे आणि एकचिन्हांने युक्त असतील तर ती रद्द करिता येतील.

## तिसरा प्रकार

समीकरणांत अपूर्ण बीज पदे असतील त्यांचे छेद सोडवायाचा  
रीति. अतिपदांचे छेदांनी त्या त्या पदांमधून बाकीचा सर्व पदांस  
गुणावे. अथवा सर्व छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकाराने पूर्व  
समीकरणास गुणावे. (३म०प्र०)

टीप. जर एकच संख्या अथवा पद दोनही बाजूंस साधारण-  
गुणक किंवा भाजक असेल तर तें रद्द करितां येईल.

### उदाहरणे.

$$(1) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = 12$$

$$3x + 2x + 12 = 72$$

$$5x + 12 = 72$$

$$5x = 72 - 12$$

$$x = \frac{72 - 12}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$(2) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12$$

यांत छेदांचा लघुतम साधारण

गुणाकार १२ याणे गुणून,

$$6x + 4x + 3x = 144$$

$$13x = 144$$

### चवथा प्रकार

अव्यक्त पद करणीरूप असेल, तर त्याची करणी सोडवायाचा  
रीति. पदांस स्थळांतर करावे असे की, करणीरूप अव्यक्त पद,  
समीकरणाचे एके बाजूस एकाकी राहील. आणि दुसरी सर्व  
पदे दुसरे बाजूस होतील. नंतर समीकरणाचा दोनही बाजूं क-  
रणीने घाला प्रथेंत वाढवाया. म्हणजे अव्यक्त पदाची करणी  
सुटेल. (४म०प्र०)

### उदाहरणे

१.  $x^2 + 12x + 36 = 0$  या समीकरणाचे लक्षण, व तो काढण्याची रीति, दुसरे भाग  
लिहिजे.



(५१)

$$(१) \sqrt{१२+६५} + ४ = ८ \quad | \quad (२) \frac{१२ + \frac{६५}{४}}{\frac{६५}{४}} + ४ = ८$$

$\sqrt{१२+६५} = ४, १२+६५ = १६५, ६५ = ४३०$  उत्तर,

### पांचवा प्रकार

कोणत्याही समीकरणात अव्यक्त पदांचा पूर्ण घात असेल तो सोडवा वयाचा.

रीति: पूर्व प्रकारांत सांगितल्या प्रमाणे पदांस स्थळांतर करून अव्यक्त पदे एके बाजूस आणि अव्यक्त पद एके बाजूस करावे. नंतर दोनही बाजूंचे त्या अव्यक्त पदांचे पूर्ण घाता पर्यंत मूळ काढावे.

#### उदाहरणे

$$(१) \frac{x^2}{४} = १४० \quad | \quad (२) \frac{वस^2}{४} + \frac{अस^2}{४} = क$$

$$\frac{x^2}{४} = ५९, ६५ = २४२ \quad | \quad सो(\frac{वस}{४} + \frac{अस}{४}) = क, सो(\frac{वस}{४}) = क$$

$$६५ = २४२, ६५ = ७ हे उत्तर. \quad | \quad सो = (\frac{क}{४}) \quad | \quad सो = \sqrt{\frac{अवक}{४}} हे उत्तर$$

### सहावा प्रकार

कोणत्याही प्रमाणास समीकरणाचे रूप द्यावयाचे. रीति: दोन चोवट पदांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकार बराबर करावा. ह्याने समीकरणाचे रूप होतें.

#### उदाहरणे

$$(१) २६५ + ५: ५६५ + ३६५:: ३: ५ \quad | \quad (२) \frac{३६५}{५}: अ:: व: क$$

$$३५६५ + २५ = ३५६५ + १६५ \quad | \quad \frac{३६५}{५} = अव$$

$$६५ = २६ हे उत्तर. \quad | \quad ६५ = \frac{३६५}{५} हे उत्तर.$$

पूर्व प्रकारांची वेगळी उदाहरणे.



- (१) ७क्ष-१२=१क्ष+९ बांत क्ष या अव्यक्त  
पदाची किंमत काय? ..... क्ष=७
- (२) कक्ष+वक्ष=स ..... क्ष= स
- (३) क्ष+क्ष-क्ष=३क्ष ..... क्ष= ३
- (४) क्ष+३क्ष=कक्ष ..... क्ष=(३कक्ष)<sup>१</sup>
- (५) अक्ष+कक्ष=१२ ..... क्ष=(१२अ+कक्ष)<sup>१</sup>
- (६) १२क्ष+१२क्ष+१२क्ष=३६क्ष ..... क्ष=४
- (७) ३क्ष+१२क्ष=१५क्ष ..... क्ष=१५
- (८)  $\sqrt{४+१२}$  = ४-१क्ष ..... क्ष= २
- (९) २क्षसक्ष=क्षक्ष ..... क्ष= ३
- (१०)  $\sqrt{१२+१२}$  -  $\sqrt{१२-१२}$  = २ ..... क्ष= १२

**एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाचाराती.**  
जेव्हा वेगवेगळे समीकरणांत दोन अव्यक्त पदे आहेत.  
प्रथमरीति. प्रत्येक समीकरणांत एका अव्यक्त पदाची किंमत  
काढून, त्या दोन किंमती बराबर लिहिल्या पासून एक नविन  
समीकरण उत्पन्न होईल. जांत अव्यक्त एकच येईल. नंतर त्या  
ची किंमत पूर्वप्रकाराने प्रमाणे निघेल.  
टीप. जा अव्यक्त पदाची किंमत काढावयास सगळ्या आहे,  
त्या पासून किंमत काढावयास आरंभ करानी.  
दुसरीरीति. दोनही समीकरणांत जें अति सोईचें असेल, त्या  
त एक अव्यक्त पदाची किंमत काढून, ती दुसरे समीकरणांत  
अव्यक्त पद स्थळी ठेवानी या पासून नविन समीकरण उत्पन्न

होईल. यांत एकच अव्यक्त पद येईल. त्यांची किंमत पूर्व प्रकारां प्रमाणें निघेल.

तिसरी रीति. सांगितली दोन समीकरणे तयार संख्येनें किंवा पदानें गुणावी किंवा भागावी, अशीं कीं, दोहोंत ही एक अव्यक्त पद बराबर होईल. नंतर त्या बरोबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हे विरूप असल्यास दोनही समीकरणांची बेरीज आणि सरूप असल्यास दोहोंची वजाबाकी करावी. या पासून एक नविन समीकरण उत्पन्न होऊन, किंमत निघेल.

टीप. विषम वेळा प्रकाशक पदें समवेळा प्रकाशक करणें तर, परस्परान्स परस्परान्ने वेळा प्रकाशक गुणक लावावे.

### उदाहरणें.

(१)  $११५ + ३५ = १००$ ,  $४५ - ७५$  यांत क्षची व यची किंमत काय?

दोहोंत क्ष = किमती काढून  $\frac{१०० - ३५}{३५}$ ,  $\frac{४ + ७५}{३५}$ , या दोनही किमती परस्पर जो.  $\frac{१०० - ३५}{३५} = \frac{४ + ७५}{३५}$ , छेद सोड.  $४०० - १२५ = ४५ + ७७५$  स्थळांक.  $८२५ = २५६३$  य = ४ ही किंमत क्ष =  $\frac{१०० - ३५}{११}$  यांत ठेवून, क्ष = ८ उतर, क्ष = ८ य = ४

(२)  $५ + ५ = ७$ ,  $५ + ५ = ८$  यांत क्षची व यची किंमत काय?

दोनही समीकरणांचे छे. सो.  $३५ + २५ = ४२$ ,  $२५ + ३५ = ४८$  क्षचा दोनही कि. जो.  $\frac{४२ - २५}{३} = \frac{४८ - ३५}{२}$ , छे. सो.  $८४ - ४५ = १४४ - ६५$  स्थळांक.  $५५ = ६०$  य = १२, क्ष = ६ हें उतर.

(३)  $५ + १५ = १२$  य = ३ क्ष = २ यांत क्षची व यची किंमत काय?

क्ष=५३-१५य ही किं दु. समी. ठे. य+१५१-४५य=२७

स्थानंतरक० ४४य = १३२, य=३ क्ष=८ हैं उत्तर

(४) क्ष+८य=१९४, यु+८क्ष=१३१ यांत क्षची वयची किं. काय?

छे. सो. क्ष+६४य=३५५२, य+६४क्ष=१०४८ } क्ष=१५५२-६४य

ही किंमत दुसरे समीकरणांत ठेवून य+९९३२८-४०९६य=१०४८

स्थाना. क० ४०९५य=९८२८० य=२४ क्ष=१६ हैं उत्तर.

(५) क्ष+७य=१९, यु+७क्ष=५१ यांत क्षची वयची किंमत काय?

दोनही समीकरणांत ७ नीं गुणून, क्ष+६९य=६९३, य+६९क्ष=३५७

वेरीजक० ५०क्ष+५०य=१०५० अथवा क्ष+य=११ हैं दु. समी

क० वजाक० (य+६९क्ष=६९३) - (क्ष+य=११) = ४८क्ष=३३६

उत्तर, क्ष=७ य=१४

(६) ३क्ष+६ य=३२, ११य-६क्ष=२० यांत क्षची वयची किं. काय?

म० स० छे. सो., ६क्ष+७य=४४, दु. स० छे. सो. ५५य-३६क्ष=१००

दु. स० ३ नीं गुणून, (-६क्ष+१६५य=३००) + म० स० (६क्ष+७य=४४)

= १७२य=३४४ } य=२ क्ष=५ हैं उत्तर.

**एकवर्ण समीकरण पृथक्करणावारीति.**

जेव्हा समीकरणांत तीन अव्यक्त पदे आहेत.

मथ्यमरीति. प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किंमत दुसरी अव्यक्त पदे व्यक्त मानून काढावी. नंतर मथ्यम किंमत दुसरीचे बराबर आणि मथ्यम किंवा दुसरी तिसरीचे बराबर करावी; सगळे दोन नवीं समीकरणे होतील. त्यांची किंमत पूर्व प्रमाणे निघेल. आणि यापासून तिसऱ्या अव्यक्त पदाची किंमत निघेल.

**दुसरी रीति.** एक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किंमत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्याच्या अव्यक्त पदस्थळां लिहून, नवीं दोन समीकरणें उत्पन्न होतील, त्यांची किंमत पूर्वीप्रमाणें निघेल.

**तिसरी रीति.** एकेक समीकरण, तशी संख्या किंवा अक्षर चिन्ह याणें गुणावें किंवा भागावें की, जा पासून त्या सर्व समीकरणांत एक अव्यक्त पद बरोबर होईल. नंतर या तीन समीकरणांतून कोणतीही दोन तिसऱ्यांत वजा कसवी. अथवा पिठवावी. अशी की, जेणें करून एक अव्यक्त पद व एक समीकरण कमी होईल. नंतर दोन समीकरणापासून दोन अव्यक्त पदांचा किंमत निघतील.

या प्रमाणे चार, पांच किंवा त्याहून अधिक अव्यक्त पदे असली तरी त्यांची किंमत काढता येईल.

वर जा समीकरणांचा रीति लिहिल्या, त्या मित्राच थोडक्यांत आणि अतिसोपी अशी एक रीति आहे, ती बीजगणिताचा अति अभ्यास केल्यावर आपो आप मकट होईल.

### उदाहरणे.

(१)  $x + y + z = ३१$ ,  $x + y - z = २५$ ,  $x - y - z = ९$  यांत  $x, y$  आणि  $z$  या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

म. स. कि.  $x = ३१ - y - z$ , दु. स. कि.  $x = २५ - y + z$ , तिस. कि.  $x = ९ + y + z$ , पथ. आणि दु. कि. जो  $३१ - y - z = २५ - y + z + z$ , स्थळांक  $-z = ६$ ,  $z = २$  ही किंमत दु. व ति. चांतीने.



-य+२८ = य+१२, स्थ.कां.क० २य=१६, य=८

क्ष=२५-य+ज्ञ यांत किंमतीठे० क्ष=२० य=८ ज्ञ=३ हें उत्तर.

(२) क्ष+य-ज्ञ=८, २क्ष+य+३ज्ञ=३१, ३क्ष+२य+४ज्ञ=४० वां

तक्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

क्ष=८+ज्ञ-य ही किंमत दुस० आणिति-समीकरणांत लि.

१६+२ज्ञ-२य+य+३ज्ञ=३१ } य=५, ज्ञ=१५

२४+३ज्ञ-३य+२य+४ज्ञ=४० } य=७, ज्ञ=२२

किं० जोडून, ५ज्ञ-१५=७ज्ञ-२२ स्थ.कां.२ज्ञ=८ } ज्ञ=४

उत्तर, क्ष=७ य=५ ज्ञ=४

(३) ३क्ष+२य-ज्ञ=२०, २क्ष+३य+६ज्ञ=७०, क्ष-य+६ज्ञ=४१

यांत क्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

दु० व ति० यांची बे० घे० ३क्ष+२य+१२ज्ञ=१११ यांत प्र० वजा क०

१३ज्ञ=९१ ∴ ज्ञ=७ ही किं० ति० स० लि० क्ष-य+४२=४१ स्थ

कां० क्ष-य=-१ दु० व ति० यांची वजा० करून क्ष+४य=२१

यांत क्ष-य=-१ वजा करून, ५य=२२ य=६, क्ष=५

उत्तर, क्ष=५ य=६ ज्ञ=७

सोडवावया करितां समीकरणे.

(१) { (क्ष-य) (क्ष-य)=३क्षय } यांत क्षची वय य=२, ४

{ (क्ष-य) (क्ष-य)=४५ } यांची किंमत काढ? क्ष=४, २

(२) { क्षय+क्षय=३० } यांत क्षची वयची कि क्ष=१, -६, ११

{ क्ष+य=६ } मत्त काढ? य=-६, १, ११

(३) { (क्ष-१य)=(क्ष-१य) } यांत क्षची वय क्ष=३+२५२

{ (क्ष+य)=२(क्ष-य) } यांची किंमत काढ? य=१



(४)  $\begin{cases} 3\sqrt{४य-क्ष} + 3\sqrt{य-क्ष} = \sqrt{२य-क्ष} & \text{यांत क्षची क्ष=७} \\ 3\sqrt{क्ष-६य} + \sqrt{य-९क्ष} : \sqrt{क्ष-६य} :: १३ : १ & \text{वयची किंमत य=०} \end{cases}$

(५)  $\begin{cases} ३ - \frac{७+३५}{५} = ५ - \frac{५क्ष+९}{३य-१००} & \text{यांत क्षची वयची किं क्ष=९} \\ य - \frac{४+१५य}{६क्ष-२} = \frac{३क्षय-१००}{२क्ष+५} & \text{मन काय? य=३} \end{cases}$

(६)  $\begin{cases} \frac{११-६}{७य} + \frac{४क्ष+७}{३य} - \frac{७क्ष+५}{४य} = \frac{१९+य}{४य} - \frac{११क्ष+५}{२५य} & \text{यांत क्षची} \\ ११क्ष-१५य+१३ : १०य-८क्ष+५ :: ३५-६ : ६क्ष-१३ & \text{वयची किं} \end{cases}$

(७)  $\begin{cases} ४क्ष+३य + \frac{३४+११य}{२क्ष+९} = \frac{१६क्ष+१२क्षय-८५+५य+१००}{१०} \\ २क्ष+४ = ३य + \frac{८क्ष-१०य+१००}{४क्ष+६य+३} & \text{उत्तर, क्ष=९, य=०} \\ \text{यांत क्षची वयची किंमत काय? उत्तर, क्ष=३, य=२} \end{cases}$

(८)  $\begin{cases} क्ष + ये = ६ \\ क्ष + जे = ३ \\ ये + जे = ५ \end{cases} \begin{cases} \text{यांत क्ष, य, ज या अव्यक्त प क्ष=२} \\ \text{दांची किंमत काय? य=३} \\ \text{ज=४} \end{cases}$

(९)  $\begin{cases} \frac{४क्ष+३य+३}{१०} - \frac{२य+३ज-क्ष+१}{१५} = ५ + \frac{क्ष-ज-५}{१०} \\ \frac{४क्ष+५य-३ज}{१२} - \frac{२क्ष+य-३ज}{८} = \frac{७य+३ज+१}{१०} + \frac{१}{२} & \text{क्ष=९} \\ \frac{५य+३ज}{४} - \frac{३क्ष+३य-३ज}{१२} + ३ज = य-१ + \frac{२क्ष+३य+३}{५} & \text{य=७} \\ \text{यांत क्ष य ज या अव्यक्त पदांची किंमत काय? ज=३} \end{cases}$

(१०)  $क्ष+क्ष+क्ष+क्ष-२०क्ष=२०$  यांत क्षची किंमत काय? क्ष=१३

(११)  $\begin{cases} अक्ष + वय = अ \\ वक्ष - अक्ष = व \\ कक्ष - उक्ष = क \\ उय - कक्ष = उ \end{cases} \begin{cases} \text{यांत क्ष, य, ज} \\ \text{आणि स या अ} \\ \text{व्यक्त पदांची} \\ \text{किंमत काय?} \end{cases}$

### एकवर्णसमीकरणाने प्रश्न

(१) अ आणि ब या दोघांस ५:२ अशा प्रमाणानें कांहीं द्रव्य वाटून दिलें; त्यांत अला मिळालेले द्रव्य, सर्वद्रव्याचा  $\frac{5}{7}$  पैशां ५० पौंड अधिक होतें; तर प्रत्येकास किती किती द्रव्य मिळालें तें सांग?

अ = ५६ पौंड, तर ब = ३६ पौंड आणि सर्वद्रव्य = ९२ पौंड, तर प्रमाणे, ५६ =  $\frac{5}{7}$  (९२) + ५० अथवा ४५६ = ४०६ + ४५०  
स्थ.क. ५६ = ४५०. ६ = ९० तेव्हां ४५० पौंड अला आणि २०० पौंड बला.

(२) कोणी एका धनगराजवळ मेंढ्यांचे दोन कळप होते, त्यांतील लहान कळपांत सर्व मेंढया होत्या, त मोठे कळपांत सर्व मेंढे होते. जेन रहर मेंढी मेंढी दोन दोन कों करे घातली, पुढे असें समजलें कीं, कों करांची संख्या दोन कळपांचा बजाबाकी बराबर होती. बत्याजवळ जर सर्व मेंढ्याच असत्या आणि प्रत्येक मेंढी तीन तीन कों करे घालती तर, त्याजवळ एकंदर ४३२ जीव झाले असत. तर प्रत्येक कळपांत किती किती जीव होते?

ल.क. मो.क.

उत्तर, २७, ८१

(३) कोणी एका उदम्याने ३०० पौंडांस ९ घोडे व ७ गाई विकल्या, दुसऱ्या वेळेस तितक्याच किंमतीस ६ घोडे व १३ गाई विकल्या; तर प्रत्येक घोड्याची व गाईची किंमत काय होती?

घो.पौ. गा.पौ.

उत्तर, २४, १२

(४) कोणी एका सावकारानें एकरें माचें वस्त्र १६ पौंड ४ शिलिंगास विकत घेतलें. त्याचा दर माडांस जितके शिलिंग पडले त्यांचें, वतें कापड जितके यार्ड लांब होतें त्याचें प्रमाण असें होतें कीं, ४:९ तर-

त्याका पडाचा दर काय? व ते किती लांब होते?

ला.चा. दरयाडी वि.

उत्तर, २७, १२

(५) भूमीचे दोन तुकडे चौरसाकृति आहेत त्यांत एकाची एक बाजू दुसऱ्याचा एके बाजू पेक्षा १० यार्ड लांब आहे, व त्यांचा क्षेत्रफळाने प्रमाण २५:९ असे आहे. तर त्यांचा बाजूची लांबी किती होती?

ल.चौ. सो.चौ.  
उत्तर, १५, २५

(६) एक स्त्री आणि एक पुरुष अशीं दोघे एक हांडा पाणी १५ दिवसांत पितात आणि तीं दोघे मिळून ६ दिवस त्यांतील पाणी प्यालीं नंतर पुरुष दुसरे गावां गेला, तेव्हां बाकी राहिलेलें पाणी स्त्रीस ३० दिवस पुरलें. तर स्त्री किंवा पुरुष यांतून प्रत्येकास तें पाणी किती किती दिवस पुरेल?

पु.दि. स्त्री. दिवस  
उत्तर, २० ते, ५०

(७) दोन गाड्या ओझी लादलेल्या होत्या तेव्हां ओझ्या रुढां त्यांचा वजनाने प्रमाण ४:५ असे होते. पुढें त्या गाड्यांतून ६:७ या प्रमाणानें कांहीं ओझें काढिलें, तेव्हां बाकी राहिलेल्या ओझ्यांचें प्रमाण २:३ झालें आणि त्या दोनही गाड्यांचे वजनाने बेराज १० टन होती, तर पहिल्यानें त्यांचें वजन किती किती होतें तें सांग?

उत्तर, { पहिल्या गा. व. १५ टन दुसऱ्या गा. व. २० टन  
पहिल्या गा. व. २५ टन दुसऱ्या गा. व. ३० टन

(८) १९ मोहोरा आणि ६ पुतण्या यांणी एक पिशाची भरविली व ५ मोहोरा आणि १ पुतण्यांनी तिचे रेंद भरविली, तर तीन मोहोरा व पुतण्या प्रत्येकी किती किती रहातील?

मो. पु.

उत्तर, २१, ६३

(९) गणित प्रमाणांत त्याचार संख्या काय आहेत? कीं पहिलीः चवथीः १:२ आणि दुसरी: तिसरी: ३:४ आणि त्याचो हो चीबेरीज व ३ = ४ होतात. तेव्हां त्या संख्या कोणत्या?

उत्तर, ३, ४, १, १

(१०) अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळावयास बसले. त्यांत अ चे जवळ ८०० रुपये आणि बचे जवळ ६९० रु० हे खेळाचे आरं भी होते. पुढे खेळांत परस्परांची हार जिंक होऊन शेवटास उठू न गेले; तेव्हां असें प्रमाण झालें कीं, अची शिल्लक : बची शिल्लक :: १७:१३ याजवरून कोण किती हारला?

उत्तर, १४ रु० ब हारला.

### वर्गसमीकरण.

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे.

एकाकी वर्गसमीकरणांत अव्यक्त पदाचा वर्ग मात्र येतो. जसें, अक्ष = ब या समीकरणाचे पृथक्करणाचा रीति एक वर्गसमीकरणांत सांगितल्या आहेत.

संयुक्त वर्गसमीकरण हा प्रकार जांत अव्यक्त पदाचा द्विघात व त्र्यम घात येतो. जसें, अक्ष + बक्ष = क.

संयुक्त वर्गसमीकरणास पूर्वी सांगितले प्रकारां प्रमाणें स्थळांत रादिकरून सरळ करावे. जसें कीं, ते पुढे लिहिलेले तीन सारणी कोष्टकांतून एके सारणी कोष्टकाचे जातीचे होईल. जसें,



क्षे+अक्ष=ब, क्षे-अक्ष=ब, क्षे-अक्ष=-ब ह्यणजे यांत वर्ग-  
पदास गुणक, भाजक, करणी, किंवा उणे निह्यांतून कोणतेही नसवें.

वर्ग समीकरणाचे पृथक्करण चा सामान्य रीति अशी आहे, जीस  
वर्ग पूर्णीकरण ह्यणतात. ती-

रीति. समीकरणास सरळ केल्या नंतर दुसरे पदाचे बेळा प्रकाशका  
चे अर्धाचा वर्ग दोनही बाजूंत मिळवावा, ह्यणजे अव्यक्त बाजूचा  
पुढा वर्ग होईल; नंतर दोनही बाजूंचे वर्गमूळ काढिल्याने अव्यक्त प  
दाची किंमत निघेल.

अव्यक्त बाजूचें मूळ (±) असें मानावे, ह्यणजे अव्यक्त पदाचा दोन  
किंमती निघतील.

वर्ग समीकरणे जांत अव्यक्त पदांची दोन पदे घेतात आणि प्रथम  
पदाचा घात प्रकाशक दुसरे पदाचे घात प्रकाशकाचे दुप्पट आहे.  
तेव्हां त्यांचे पृथक्करण पूर्वी प्रमाणे वर्ग समीकरण रीतीनेच होतें. ज  
से, क्षे+अक्ष=म अथवा क्ष+२+क्ष=अ

इत्यादि ही वर्ग समीकरणाचा जातीची जाणावी

+ कोणत्याही पदाचे वर्गमूळ घन किंवा ऋण असते. असें न घ्यावे वर्गमूळ +न  
किंवा -न आहे; कारण दोहोंचाही वर्ग +न असा होतो परंतु +न किंवा -नचा  
दोहोंचाही वर्ग -न होत नाही, याजकरिता -न घ्यावे वर्गमूळ अशक्य आहे.

प्रथम सारणी कोष्टकांत क्षे+अक्ष=ब आहे, याजकरिता क्ष+३अ=±३कि०अ  
कारण बराबरीचे घन ऋण या दोनही पदाचा वर्ग ब+३अ असा होतो. तेव्हा क्ष=  
±३कि०अ-३अ यावस्थेची प्रथम किंमत क्ष=३कि०अ-३अ ही सर्वदा धरू आहे.  
आणि दुसरी क्ष=-३कि०अ-३अ सर्वदा ऋण आहे.

दु० सा० कोष्टकांत क्षे-अक्ष=ब आहे तेव्हां परसांगितल्याप्र० क्ष=३कि०अ-३अ  
क्षेची प्र० कि० सर्वदा धन आणि क्ष=-३कि०अ-३अ ही दु० कि० सर्वदा ऋण आहे.

वि० सा० को० क्षे-अक्ष=-ब यांत ३अ हे व हून अधिक आहे व तेव्हा क्ष या दोन किंमती  
=±३कि०अ-३अ या धन. आणि ३अ हे व हून कमी आहेत, तेव्हा क्ष या दोन किंमती  
क्ष=±३कि०अ-३अ या ऋण राख्य आहेत. कारण उणे पदाचे वर्गमूळ अशक्य आहे



## उदाहरणे.

(१) क्ष+क्ष=०१ यावर्गसमीकरण

पांत क्षअन्यक्त पदाची किंमत का  
यआहे?

मूळसमीकरण क्ष+क्ष=०२

वर्गपुराकरून क्ष+क्ष+१=०१

मूळकाढून क्ष+१=०

३ यांस स्थळांकरून क्ष=६, -१२ उ

(२) ३क्ष+१=क्ष=१६ यांत क्षची किं

गुं व भां सो, क्ष+१/२क्ष=३३

वर्गपुराकरून क्ष+१/२क्ष+१/२=१३३

मूळकाढून क्ष+१/२=१३३

३स स्थळां, क्ष=०, -१६ हे उ.

(३) अक्ष+क्ष=० यावर्गस-

मीकरणांत क्षअन्यक्त पदाची किं

मत काय आहे?

गुं सो, क्ष+१/२क्ष=१/२

वर्गपुराक्ष+१/२क्ष+१/२=१/२

मूळकाक्ष+१/२=१/२

स्थ.क.क्ष=१/२

(७) क्ष-३क्ष=२०, क्ष+३क्ष+१=३३, क्ष-३=१/२, क्ष=०, -४ हे उ.

(४) क्ष+अक्ष=० यावर्गसमीकरण

पांत क्षअन्यक्त पदाची किंमत का  
यआहे?

वर्गपुराक्ष+अक्ष+१/२क्ष=१/२

मूळकाक्ष+१/२क्ष=१/२

स्थ.क.क्ष=१/२

वर्गक.क्ष=१/२

(५) ४क्ष+अक्ष यांत क्षची किंम

त काय?

खे सो, क्ष+१/२क्ष=१/२

वर्गपुराक्ष+१/२क्ष+१/२=१/२

मूळकाक्ष+१/२क्ष=१/२

स्थ.क.क्ष=१/२

(६) क्ष-क्ष=० यांत क्षची किंमत

काय? मू.स. क्ष-क्ष=०

गुणून, क्ष+क्ष+१/२क्ष=१/२

क्ष+१/२क्ष+१/२=१/२

मूळकाक्ष+१/२क्ष=१/२

स्थ.क.क्ष=१/२

४: क्ष=२ हे उत्तर.

(८)  $\sqrt{क्ष+क्ष+१५} + ३क्ष+क्ष = ६३$  यांत क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काढ

मूळसमीकरण दोहोनीं गु. ३  $\sqrt{क्ष+क्ष+१५} + क्ष+क्ष = ६३$

प्रत्येक बाजूंत  $\frac{१५}{३}$  मिळवून  $(क्ष+क्ष+१५) + ३\sqrt{क्ष+क्ष+१५} = ८०$

वर्गपुराकरून,  $(क्ष+क्ष+१५) + ३\sqrt{क्ष+क्ष+१५} = ८०$

मूळकाढून,  $\sqrt{क्ष+क्ष+१५} + ३ = \pm \frac{१५}{३}$  स्थ.क.  $\sqrt{क्ष+क्ष+१५} = ६$  किं. - ३

वर्गक.  $क्ष+क्ष+१५ = ३६$  किंवा  $\frac{४००}{३}$ , स्थ.क. क. व वर्गपुराक करून,

उत्तर, क्ष = ५, - ११ किंवा  $\frac{-३५ \pm ५}{२}$

(९)  $\left(\frac{१+क्ष}{१-क्ष}\right) + \frac{१-अ}{१+अ} \times \frac{१-क्ष}{१+क्ष} = २\frac{१-अ}{१+अ}$  या वर्गसमीकरणांत क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काढ

मूळसमीक.  $\frac{१+क्ष}{१-क्ष}$  यांनीं गुणून,  $\frac{१+क्ष}{१-क्ष} + \frac{१-अ}{१+अ} = २\frac{१-अ}{१+अ} \times \frac{१+क्ष}{१-क्ष}$

स्थ.क. मू. का. नंतर स्थ.क. चतुर्घातक.  $\frac{१+क्ष}{१-क्ष} = \frac{१-अ}{१+अ} \cdot क्ष = -अ$  हें उ.

(१०)  $\frac{४}{क्ष} + \frac{४}{क्ष} = \frac{अ-१}{क्ष} + \frac{अ-१}{क्ष} + \frac{अ}{क्ष}$  या समीकरणांत क्षची किंमत काढ

क्षनें भागून,  $\frac{४}{क्ष} + \frac{४}{क्ष} + \frac{४}{क्ष} = \frac{अ}{क्ष} + \frac{अ}{क्ष} + \frac{अ}{क्ष} = \left(\frac{क्ष+क्ष}{क्ष}\right) = \frac{अ}{क्ष}$

$(क्ष+क्ष) + \frac{अ}{क्ष}$ , स्थ.क.  $(क्ष+क्ष) - \frac{अ}{क्ष} = \frac{अ}{क्ष}$

वर्गपुराक,  $(क्ष+क्ष)^2 + (क्ष+क्ष) + \frac{अ}{क्ष} = \frac{अ}{क्ष}$

मूळकाढून,  $(क्ष+क्ष) - \frac{अ}{क्ष} = \pm \frac{अ}{क्ष}$  अ.  $\therefore (क्ष+क्ष) = \frac{अ}{क्ष}$  किं. -  $\frac{अ}{क्ष}$

२नीं भागून,  $क्ष+क्ष = \frac{अ}{क्ष}$  किंवा  $-\frac{अ}{क्ष}$  पुन्हा वर्गपुराक. वर्गमूळका.

क्ष =  $\pm \sqrt{\frac{अ}{क्ष}}$ ,  $\pm \sqrt{\frac{अ}{क्ष}}$  हें उत्तर.

(११)  $२क्ष+२(क्ष+२) = क्ष+२$  यांत क्षची किंमत काढ.

स्थ.क. २क्ष+२+(क्ष+२) = क्ष+२ यांतून

$२(क्ष+२) + (क्ष+२) = क्ष+२$  हे वजाक.

$२(क्ष+२) + (क्ष+२) = क्ष+२$

वर्गपु.क. नंतरचौपटक.  $4(क्ष+१) + 4\sqrt{क्ष+१}+1 = 4क्ष+4क्ष+1$

वर्गमू.का.वस्थ.क.  $2\sqrt{क्ष+१} = 2क्ष-२ \therefore \sqrt{क्ष+१} = क्ष-१$

वर्गक.  $क्ष+१ = क्ष-२क्ष+१$  स्थ.क.  $क्ष-३क्ष = -$

वर्गपु.क. मू.का.वस्थ.क.  $क्ष = \pm \sqrt{३५४५५}, \sqrt{३+४५५}$  होंगे.

(१२)  $(क्ष+६)^2 + ३क्ष(क्ष+६) = १३८ + क्ष^2$  यांतक्षची किंकाद.

वर्गपु.क.  $(क्ष+६)^2 + ३क्ष(क्ष+६) + क्ष = १३८ + क्ष + क्ष^2$

वर्गमू.का.  $(क्ष+६) + क्ष = \pm \sqrt{१३८ + क्ष + क्ष^2}$

वर्गक.  $(क्ष+क्ष^2)^2 + १२(क्ष+क्ष^2) + ३६ = १३८ + क्ष + क्ष^2$

स्थ.क.  $(क्ष+क्ष^2)^2 + ११(क्ष+क्ष^2) = १०२$

वर्गपु.क.  $(क्ष+क्ष^2)^2 + ११(क्ष+क्ष^2) + ३३ = ५३३$

वर्गमू.का.  $क्ष + क्ष^2 + ३३ = \pm ३३ \therefore क्ष + क्ष^2 = ६$  किंवा  $-१७$

वर्गपु.क. मू.का. स्थ.का. क.  $क्ष = ४$  किंवा  $९$  हों उत्तर

(१३)  $\left\{ \begin{array}{l} क्ष+य=३५ \\ क्ष+य=१३ \end{array} \right\}$  यावर्गसमीकरणांत क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांचा किंमती काढ.

दुसरे समीकरणास  $(क्ष+य)$  नें गुणून, लिपट ककून,

$३क्ष + ३क्षय + ३क्षय + ३य = ३९(क्ष+य)$

म.स.ची दु.कजाक.  $-२क्ष - २य = -७०$

$(क्ष+य)^2 = ३९(क्ष+य) - ७०$  वास  $(क्ष+य)$  नें गुणून,

$(क्ष+य)^3 = ३९(क्ष+य)^2 - ७०(क्ष+य)$  यांत  $१५(क्ष+य)^2$

दोनही बा.वजाक.ववर्गपु.क.  $(क्ष+य)^3 - १५(क्ष+य)^2 + ४९ = ३५(क्ष+य)^2 - ७०(क्ष+य) + ४९$ , वर्गमू.का.  $(क्ष+य)^3 - ७०(क्ष+य) -$

$७ \therefore क्ष+य = ५$ ,  $क्ष = ५ - य$  ही किं. दु.समीकरणांत ठेवून, स्थ.क.

$= -12 \therefore य = 5, य = -6$  वर्गपुराकरून, मूळकादून, स्थ.क.  
 $य = 2, 2$  क्ष = 2, 2 हे उत्तर.

(१४)  $\left\{ \begin{array}{l} क्ष + य = 1 + 2क्ष + 2क्ष + य \\ क्ष + य = 2क्ष + 2क्ष + क्ष + 1 \end{array} \right\}$  यांत क्ष आणि य या-  
 अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

म.स.स्थ.क. क्ष - २क्ष + य = १ + २क्ष य यांत क्ष + य दोनही  
 बाजूंत मिळ. मूळका. (क्ष - य) = १ (क्ष + य) यास (क्ष + य) ने  
 गुणून व स्थ.क. क्ष - य = २क्ष + य + क्ष यांत २य = २य मिळ.  
 $(क्ष + य) = य (२य + १) + क्ष (२य + १)$

दु.स.पासून, (क्ष + य) = क्ष (२य + १) + (२य + १)

$\therefore क्ष (२य + १) + (२य + १) = य (२य + १) + क्ष (२य + १)$

स्थ.क. मंतर (२य + १) याणे भागून, य = १ क्ष = २, २ हे उत्तर.

(१५)  $\left\{ \begin{array}{l} क्ष + य + क्ष + य = १ + २ \\ क्ष + य = २ \end{array} \right\}$  यांत क्ष आणि य या अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

क्ष + य = २, क्ष + य = १ + २, २क्ष + य = १ + २ हे मध्यसमीकरणात मि.  
 $(क्ष + य) + (क्ष + य) = १ + २ + २$ , वर्गपुराकरून (क्ष + य) + (क्ष + य) + १ = १ + २ + २  
 $\therefore$  मू.का. क्ष + य + १ = १ + २ + २ क्ष + य = १ किंवा - १.

आणि क्ष + य = २ ही कृति पूर्वी म.क. क्ष = २, य = १ हे उत्तर.

(१६)  $\left\{ \begin{array}{l} क्ष + क्ष + य = २ \dots (अ) \\ क्ष + क्ष + क्ष = २ \dots (ब) \\ य + य + क्ष = १ \dots (क) \end{array} \right\}$  यांत क्ष, य आणि क्ष या  
 अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

अ.ब. ... य - क्ष + य = २ - २ = ० य = २  
 व.क. ... क्ष + य + क्ष = २ + २ = ४ क्ष + य = २



च-ज्ञ = क्ष-य अथ- च-ज्ञ = क्ष-य, क्ष-ज्ञ = २५ ही किं० द  
 यांत मांडून, ३५ = च-ज्ञ, य = च-ज्ञ, य-यज्ञ = ३० ज्ञ =  $\frac{३०}{३}$   
 ज्ञ =  $\frac{३०}{३}$  या किमती क यांत मांडून, य-य-३ +  $\frac{३०}{३}$   
 अथवा २५ +  $\frac{३०}{३}$  = ३५ छे० सो० ३५ - ६५ = ३० य  
 स्थ० क० व गु० सो० य-३५ य = ३० वर्ग पुराक० मु० का० स्थ०  
 क० य = ३० य = ३०, ज्ञ =  $\frac{३०}{३}$  = ३० आणि क्ष = २५ - ज्ञ = ६५ - ३० = ३५  
 उत्तर, क्ष = ३५, य = ३०, ज्ञ = ३०

जां पासून वर्ग समीकरणें उत्पन्न होतात असे

प्रश्न

(१) त्या दोन संख्या काय आहेत कीं, जांची बेरीज १२ आणि जां  
 चा गुणाकार ३५ होतो. क्ष आणि य या दोन संख्यांचे तर,  
 क्ष + य = १२, क्ष = ३५ - य तेव्हा १२ - य =  $\frac{३५}{३}$  छे० सो० १२ - य =  
 क्ष य = ३५, क्ष =  $\frac{३५}{३}$  ३५ - विद्धे बदलक० य = १२ य = ३५  
 वर्ग पुराक० य = १२ य + ३५ = ३५ मु० का० व स्थ० क० य = ३५, ५  
 उत्तर, क्ष = ५, य = ३५

(२) एकामधुष्याने ६० रुपयांस कांहीं मेंदरें विकत घेतलीं; त्या-  
 पैकीं १५ घरीं ठेवून, बाकी ५५ रुपयांस विकलीं. त्या व्यापारांत त्या  
 सदर मेंदरास १० रुपया नफा झाला. तेव्हां एकंदर किती मेंदरें  
 होतीं?

क्ष = मेंदरें, तर  $\frac{६०}{३}$  मये कांही किंमत  
 क्ष - १५ =  $\frac{६०}{३}$  छे० सो० ५५ - क्ष = ६० क्ष + ९० = ६५ - १५



स्थ.क. क्ष+४५क्ष=१००० वर्गपु.क. क्ष+४५क्ष+ $\frac{३३३}{४}$ = $\frac{३८०३३}{४}$

मू.का. क्ष+ $\frac{३३३}{४}$ = $\frac{११३३}{४}$ , स्थ.क. क्ष= $\frac{११३३}{४}$ =२८३.२५ मेंदरे हें उत्तर.

(३) एका काटकोन चौकोन आकृतीचा बाजू ८:५ या प्रमाणात आहेत आणि त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ २९६ आहे. तेव्हा त्याची प्रत्येक बाजू काय?

क्ष मोटी बाजू, ५ क्ष ल. बा. ४० क्ष=२५६०, क्ष=६४, क्ष=८ तेव्हा  
८ क्ष=६४, ५ क्ष=४० उत्तर, मो. बा. ल. बा.  
८, ५

(४) कोणो एकाने एक मश्रुधान २४ रुपयांस विकले. सात त्याला मूळ किंमती इतका दर शेंकडा तोटा झाला. तेव्हा मूळ किंमत काय?

क्ष मूळ किंमत. क्ष-२४ तोटा, तर क्ष: क्ष-२४:: १००: क्ष  
क्ष=१०० क्ष-२४०० स्थ.क. क्ष=१०० क्ष=२४०० वर्गपु.क. क्ष-  
१०० क्ष+२५००=१०० मू.का. स्थ.क. क्ष=६० किंवा ४० रु. मू. किं.

(५) गणित प्रमाणांत तीन संख्या काढा. अशा की, उद्धान संख्येचा वर्ग दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असता, १६ आणि मोठे संख्येचा वर्ग लहान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असता, २० होतात. तर त्या तीन संख्या कोणत्या?

क्ष-य प्र. सं. क्ष दु. सं. क्ष+य ति. सं. सात उत्तर=य

तर २क्ष-क्षय+य=१६... अ व अ... २क्षय=१२, क्षय=६

२क्ष+क्षय+य=२०... व :: क्ष=३ ही किं. दु. समीकरणां

त लि. समीक. सोडू य=२, क्ष=३ :: १, ३, ५ ग. सं. हें उत्तर.

(६) दोन संख्या काढा. अशा की, जांवी बेरीज ११ आणि वर्गाचा गुणाकार ७८४ होतो.

क्ष आणिय या संख्या घे तर, क्ष + य = ११, क्ष य = १०४

य.स.वर्गक. त्यांत दु.समी.वर्गमूळाची चौ पट वजाव. क्ष = २ क्ष + य = ११, वर्गमू.का. क्ष - य = ३, क्ष + य = ११ ∴ क्ष = ०।४ य = ४, १० संख्या

(१०) दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी १५ आणि त्या संख्यांस परस्परांमधीं भागिलेल्या भागाकारांची बेरीज  $\frac{१५}{४}$  आहे. तेव्हां त्या दोन संख्या कोणत्या?

$$\text{क्ष} - \text{य} = १५$$

$$\text{क्ष} = \sqrt{१५ + \text{य}} \text{ ही किं. दु.}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}} = \frac{१५}{४} \text{ छे. सो. क्ष + य} = \frac{१५}{४} \text{ क्ष य समीकरणांत लिहून,}$$

$$१५ + ३\text{य} = \frac{१५}{४} \text{ य } \sqrt{१५ + \text{य}} \text{ वर्गक. छे. सो. स्थ. क. वर्गपु. क.}$$

$$\text{मू. का. य} = १ \text{ क्ष} = ४$$

उत्तर, १ आणि ४ सं.

(११) ती संख्या काय आहे, जिला दोन मूळ अंकांचे गुणाकाराने भागिले असतां भागाकार २ येतो आणि तीन २० मिळविले असतां मुक्कम स्थिती होत्ये.

$$१० \text{ क्ष} + \text{य} \text{ मूळ संख्या तर, } \frac{१० \text{ क्ष} + \text{य}}{\text{क्ष य}} = २, १० \text{ क्ष} + \text{य} + २० = १० \text{ य} + \text{क्ष}$$

$$\text{दु. स. स्थ. क. व ३ तीं भा. य} = \text{क्ष} + ३ \text{ ही किं. य. समीकरणांत लि.}$$

$$१० \text{ क्ष} + \text{क्ष} + ३ = २ \text{ क्ष} (\text{क्ष} + ३) \text{ अथवा } ११ \text{ क्ष} + ३ = २ \text{ क्ष} + ६ \text{ क्ष}$$

$$\text{स्थ. क. } २ \text{ क्ष} - ५ \text{ क्ष} = ३ \text{ पु. सो. व वर्ग पु. क. क्ष} = \frac{३}{३} \text{ क्ष} + \frac{३}{३} = \frac{४}{३}$$

$$\text{मू. का. क्ष} = \frac{४}{३} \therefore \text{क्ष} = १, \text{ य} = ६ \text{ याजकरितां } १० \text{ क्ष} + \text{य} =$$

$$२६ \text{ मूळ संख्या हे उत्तर.}$$

(१२) त्या तीन संख्या काय आहेत कीं, प्रथम व दुसरी आणि दुसरी व तिसरी यांचा वजाबाक्यांची वजाबाकी २ तसें जांची बेरीज १० आणि वर्गांची बेरीज १२९.

उत्तर, २५, १०

११०) एके पलटणी चीं कांहीं माणसें पोकळ चौरसाकृति उभीं के  
 छीं त्यांत तीन तीन सांगा होत्या; नंतर त्या माणसांत १५ माणसें दुसरीं  
 मिळवून त्यांची एक भरीव चौरसाकृति केली; जा चौरसाची एक बा  
 जू पोकळ चौरसाचे बाजूचे वर्गमुळाहुन २२ नीं अधिक; तेव्हां त्या  
 पलटणींत प्रथम माणसें किती होती? उत्तर, १३६ माणसें.

### घनादिसमीकरण.

घनादिसमीकरण पृथकरणाचा सामान्यरीति बहुत आहेत; प  
 रंतु त्यांतून सरलम आणित्योक्त्यांत करणाचा रीति सांगतो.

#### प्रथमरीति.

गणिताचा तपशील कळून दोन संख्या काढल्या; जा मूळाचे जवळ  
 जवळ येतील. नंतर त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्तपदस्य  
 कीं ठेवून, त्याचे त्याचे चिन्हांनीं एकत्र कराव्या. नंतर समीकरणाची  
 सांगितलेली किंमत व्यक्तपद, तें याहुन कमी किंवा जास्त असेल,  
 त्या प्रमाणें दोन वजा वाव्या काढव्या. व्यक्तपद अधिक असल्यास  
 वजावाकीस उर्जेचिन्ह आणि कमी असल्यास अधिक चिन्ह करावें.

वरप्रमाणें काढलेले दोन संख्यांची वजावाकी दोन अंतरांतून एका  
 नें गुणावी; गुणाकार येईल तो, जर दोन अंतराची चिन्हे सरूप आहे  
 त तर, वजावाकीनें आणि विरुद्ध आहेत तर, मिळवणीनें भागावा अ  
 थवा या रीतीनें घे राशिक करावें. जशी दोन अंतरांची वजावाकी अ  
 थवा बेरीज. कोणतेही अंतरास: तशी त्या दोन संख्यांची वजावा

की; त्या घेतले अंतराचे संख्येचे शब्दीस.

वरका मांत घेतलेलें अंतर जर उणें आहे, वरहें इच्छाकळ त्या-  
अंतराचे संख्येत मिळवावें आणि अधिक आहे तर वजा करावें ह्म-  
णजे इच्छिले मूळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल.

हें मूळ आणि पूर्व मूळाचे जवळ जवळ होत संख्या काढल्या आ-  
हेत, त्यांतून एक अथवा दुसरी कोणतीही संख्या जी मूळाचे जवळ  
जवळ आहे, ती घेऊन पूर्वी प्रमाणें पुनः करावें; ह्मणजे पूर्वी पेशां  
अधिक जवळ दुसरें मूळ निघेल. या प्रमाणें पुनः पुन्हा करीत जावें,  
ह्मणजे अतिव मूळ जवळ संख्या निघत जाईल.

प्रथम टीप. होत संख्या घेणें त्या अशा ध्याव्याकीं, जांची वजावा-  
की एक राहील आणि पृथक्करण करते समयी लहान अंतर का  
मांत घ्यावें.

दुसरी टीप. गणिताचा तपशील करते समयी मूळांक तपासावे.  
होन संख्या घेणें त्या एक किमतीहून उणी आणि एक किमतीहून  
अधिक अशा ध्याव्या.

### उदाहरणें

(१)  $१३ + १३ + १३ = ३९$  या घन समीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची  
किंमत काढ.

क्षची किंमत ४ आणि ५ यां	पुनः ४.७ आणि ४.८ हीं खरी
चे मध्यें आहे याजकरितां,	मूळें जाणून,
प्र. सं. अव्यक्त दु. सं.	प्र. सं. अव्यक्त दु. सं.
४ ..... ४९ ..... ५	४.७ ..... ४९ ..... ४.८



१६ ..... २५

६४.....६३.....१२५

८४... बेरीज ... १५५

१३५- सांगि. किंमत. १३५

-५१ ... अंतरे ... +२०

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज

जसे, ७१ : १ :: ५१ : ७

हैं ४ यांत मिळवून,

क्ष = ४.७ हैजबक जबक आ

पक्ष: ४-७७९ आदि ४-११८

होने:

सं. सं. १३३३३

Y. 1198

...

[illegible]

১৯৩৬

१९५४

सागिकः १३५

1.068 अतरे + 1.043

$$(2) \text{ क्ष} - 3\text{क्ष} + 2\text{क्ष} = 0$$

वाकिमत काय आहे?

## हस्तो किमत ३.९ आणि

CONFIDENTIAL

२२.०९... ६१... २३.०४

१०३.८२३... ६१... १०८.२८

१३०६१३... बेरीज... १९६१९५

१५५ सां. किं. १३५

अंतर्गत + १.११५

५-५१५ बी टोन संवर्ग बी के

જાત્રી ૫-૫-૧૫૦ ૧૧ : ૧-૧૩૬ : ૧૩૦૪

४.२ सांख्यिक आंकड़ा

१००० वास्तुन व जाफरुल

१०८

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥

\_\_\_\_\_

७९ हा दान अंतराचा राजा

009: 009 :: 1.068: 0022

हृ ४ ७११ यासंतव जाकरून

४७६६ = क्ष हजवळजवळ

आह.

1990

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

समीकरणान्तर्गत अन्यक्तपदा

1945

पांचे मध्ये आहे. तर,

1948年10月1日



म.सं. अव्यक्त दु.सं.

३९... क्ष... ४

३९११... २... ४

१०००११०... १११... ११२

१०२२२२... १०२४

१३५३३५-देरीज... ८३६

८३४... सांगि.सं... ८३४

१०५०५५५-अंतरें... १२

दोन अंतरांची वेरीज १००.५६६

असें, १००.५६६ : १ : १०५.५६६ :

०९८१ हें ३९९ यांत मिळवून

३९९८१ जवळ जवळ आहे हें

उत्तर

तिसरी टीप या समयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण करावें, तिसरी समीकरणास तिसऱ्यां मूळें आहे तर्की, त्यांत जिनक्या घातप रं परायेतात, अथवा समीकरणांत अव्यक्त पदांवा सर्वांतून मोठा घात मकादाक गितके किमतीचा आहे, हाणजे एक वर्ग समीकरणांत अव्यक्त पदास मूळ किंवा किंमत एक आहे, वर्ग समीकरणांत २, घन समीकरणांत ३ इत्यादि.

जेव्हां कोणतेही समीकरणाचें मूळ संनिध रीतीनें निघालें, तेव्हां राहिलीं मूळें पुढें सांगितल्या रीतीचें काढतां येतील.

समीकरणांत व्यक्त पदास स्थानंतर करावें आणि संनिध रीतीनें काढलेलें मूळ अव्यक्त पदांत वजा करून त्याणें त्यास भागावें, हाणजे एक घात कमी दुसरे एक समीकरण उसम होईल. यानवे समीकरणाचें मूळ संनिध रीतीनें काढावें, हाणजे समीकरणाचें दुसरे मूळ निघेल, नंतर या दुसरे मूळानें पूर्वीप्रमाणें दुसरे समीकरणाहून एक घात कमी असें तिसरें समीकरण करावें

असें वर्गसमीकरण होई पर्यंत करावें. वर्गसमीकरण झाल्यानंतर त्यांचा किमती वर्गसमीकरणाचा रीतीनें दोन निघतील. या मभा जें सर्व मुळें निघतील.

(३) क्ष-१५क्ष+६३क्ष=५० यांत क्ष=१०२००४ हें एक मुळ काढिलें आहे. तर क्ष-१०२००४ हा भाजक.

क्ष-१०२००४) क्ष-१५क्ष+६३क्ष-५० (क्ष-१३९७९६ क्ष+४८६३७  
=० हें दुसरें नवें समीकरण उत्पन्न झालें. याचें वर्गसमीकरण रीतीनें पृथक्करण करून दोन किमती निघतात.

उत्तर, १०२००४ प्र. मुळ, १५७९६३ दु, १३९७९६३.

चवथी टीप. यावरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे की, दुसरी रीतीनें पृथक्करण करून किंमत काढा यास त्या समीकरणास एक रूप द्यावें लागतें, तसें या रीतींत नाही. ही रीति समीकरणाचें जें रूप आहे, त्यावरच लागते. समीकरणांत कशीही करणी पदें किंवा संयुक्त पदें असोत.

(४)  $\sqrt{५६५१२६५} + ३६५ = २५$  या समीकरणांत क्षची किं. काय?

उत्तर, २

**दुसरी रीति.**

कोणत्याही समीकरणाचें मुळ अवकजवक काढावयाची रीति. समीकरणांत जा किमती मांडिल्या असता, इष्ट संख्येपेक्षां एक वेळ कमी आणि एक वेळ अधिक फल येईल, अशा दोन संख्या शोधून काढाव्या. सगळी स्वरी किंमत त्या दोहोंचा मध्यें आहे, असा निश्चय होतो. मंतर यांतून एक किंमत आणि स्वरी किंमत यांचें अं

तर व आहे असें मावून, ते घन ऋण करून तीस जोडावे. आणि ते पद अव्यक्त पद स्यकों ठेवून, त्याचे वर्गापासून पुढील घात ठहान अ पूर्णांक होतात, ह्यापून ते सर्व सोडून द्यावे, ह्याणजे एक वर्ण समीक रणाचा रीतीने व ची किंमत निघेल, ती कल्पित संख्येस जोडली ह्याणजे खरी किंमत होईल.

### उदाहरण

क्ष-४क्ष-११५=० या समीकरणांत अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

यांत क्ष=५ केव्हास-१० येतात, आणि ५२ केव्हास+४१० येतात, ह्यापून क्ष=१+व, क्ष=१२५+७५व+१५व<sup>२</sup>+व<sup>३</sup>

आणि-४क्ष=-२०-४व

-११५=-११५

क्ष-४क्ष-११५=-१०+७५व+१५व<sup>२</sup>+व<sup>३</sup>-११५=

-१०+७५व+१५व<sup>२</sup>+व<sup>३</sup> आता ७५व=११५, व=१५, क्ष=१२५

पुनः क्ष=५१४+व, क्ष=१२५+७५व+१५व<sup>२</sup>+७५२५व+१५११

व<sup>३</sup> व<sup>३</sup>

-४क्ष=-२०-४५ आणि-११५=-११५

क्ष-४क्ष-११५=२३५०४५+७५२५२५व+१५११११

+व<sup>३</sup>, ७५२५२५व=-२३५०४५, व=-३०२५९

क्ष=५१३५९१ हे उत्तर जवळ जवळ आले.

### व्याज

कोणतेही सुदलाचे कितीही मुदतीचे व्याज, सुदल आणि सु

दती यांशीं प्रमाणान्त असते. याजकरितां,

**सरळ व्याज**

प = मुद्दल कर्ज.

अ = व्याज मुद्दल रास.

त = मुदती.

र = एकरूपयाचें एकवर्षाचें व्याज.

समूह,

अ = प + परत व्याज मुद्दल.

प =  $\frac{अ}{र+त}$

त =  $\frac{अ-प}{र}$

र =  $\frac{अ-प}{त}$  व्याजाचा दर.

मुद्दल दुप्पट होण्यास.

त =  $\frac{अ-प}{र} = \frac{1}{र}$

**चक्रवाट व्याज**

प = मुद्दल कर्ज.

अ = व्याज मुद्दल रास.

त = मुदती.

र = एकरूप एकवर्षाचें व्याज.

च = एकरूप एक मुदतीची रास.

१ रु० : प :: च : पच एके मुदतीची रास.

१ : पच :: च : पच दोन मु० रास.

१ : पच :: च : पच तीन मु० रास.

१ : पच :: च : पच त मु० रास.

समूह,

अ = पच  $\frac{अ}{च}$  प =  $\frac{अ}{च}$

त =  $\frac{अ-प}{र}$  च =  $\frac{अ-प}{र}$

मुद्दल दुप्पट होण्यास.

अ - प - अ - प =  $\frac{अ-प}{र}$

**उदाहरणें.**

(१) दर साल दरशेकडा ५ रुपये प्रमाणें १३५ रुपये मुद्दलाचें २ वर्षें ३ महिन्यांचें सरळ व्याज काय होईल?

आतां प = १३५, र = ३, त = २  $\frac{१}{२}$  तेव्हां अ = प + परत =

१३५ + १३५  $\times$  ३  $\times$  २  $\frac{१}{२}$  = १५० रु० रास - १३५ = १५ रु० व्या० होई.



(२) दरर लदरशेकडा ५०० प्रमाणे चक्रवाट व्याजानें कांहीं रुपये वर्षे होते, त्यांची रास ५२० रु० ५६ रु० आली; तेव्हां मुद्दल किती होतें ?

$$अ = ५२० रु० ५६ रु० = \frac{४००५१.०१}{६४.००}, च = \frac{३१}{१००}$$

$$प = \frac{अ}{च} = \frac{४००५१.०१}{६४.००} \div \left(\frac{३१}{१००}\right)^५ = ५०० रुपये मुद्दल हें उत्तर$$

### प्राप्ति.

नेमले मुदतीस जो पैक्यांचा लाभ होतो त्यास प्राप्ति म्हणावें. जसे घर, भूमि इत्यादिकाचें भाडे, कर्जाचें व्याज, वर्षसिद्ध इत्यादि वहुतकरून होलाभ वगैरे मुदतीवर असतात.

प्राप्तीचे दोन प्रकार आहेत. प्रथम प्रकार, पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती वर्तमान प्राप्ति; दुसरा प्रकार, कांहीं मुदतीनें पैका हातीं राखित येत जाईल ती भविष्य प्राप्ति.

### व्याख्या.

१ जर प्राप्ति किती एक वर्षे बंद राहिली तर, तिला अवरुद्ध म्हणावें.

२ प्राप्तीस जर कांहीं मुदतीची मर्यादा आहे तर, तिला सावधि प्राप्ति म्हणावें.

३ जी प्राप्ति निरंतर चालणारी तिला निरवधि प्राप्ति म्हणावें.

४ प्राप्तीचें व्याज मुद्दल म्हणजे अवरुद्ध प्राप्तीचें तितकें वर्षाचें व्याज आणि मुद्दल मिळून.

५ प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका देण्या घेण्यास येतो



ग्य होतो, त्यास प्राप्तीची वर्तमान किंमत स्पष्टावे.

अ = प्राप्ति.

न = प्राप्तीची वर्षसंख्या.

च = एकरूपयाचे एक वर्षाचे व्याज सुदृढ.

म = प्राप्तीचे व्याज सुदृढ.

व = प्राप्तीची वर्तमान किंमत.

ल = प वर्षांनंतर कांही वर्षे पर्यंत

त-चालणारे प्राप्तीची वर्तमान किंमत.

चराशीची एक वर्षाची वर्तमान किंमत १ आहे. याजकरिता,

च: अ :: १ : अ एक वर्षाची वर्तमान किंमत आज.

च: अ :: १ : अ दोन वर्षांची वर्तमान किंमत आज.

च: अ :: १ : अ तीन वर्षांची वर्तमान किंमत आज.

या प्रमाणे न वर्षांपर्यंतची एकंदर वर्तमान किंमत.  $v = \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \dots + \frac{a}{1} = a \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} \right) = \frac{a}{1} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} \right)$

जेव्हा प्राप्ति निरवधी आहे, तेव्हां न गळ अनंत. याजकरिता च

हाही अनंत, स्पष्टून  $\frac{1}{1} = 1$  होऊन वरील समीकरणास हे रूप होतं.

$v = \frac{a}{1}$  स्पष्टून प्राप्तीस एकरूपयाचे एक वर्षाचे व्याजाने भागावे.

भागाकार येईल ती निरवधी प्राप्तीची वर्तमान किंमत होय.

पुनः एकरूपयाचे एक वर्षाचे व्याज सुदृढ च, दोन वर्षांचे च, तीन

वर्षांचे च, आणि न वर्षांचे च याजकरिता,  $v = \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \dots + \frac{a}{1}$

च =  $\frac{a}{1}$  हे एकरूपयाचे न वर्षांचे व्याज सुदृढ आहे, तेव्हां अ प्रा

प्तीचे या प्रमाणे होतं.

$m = \left( \frac{v-1}{1} \right) a = \frac{a}{1}$ ,  $v = \left( \frac{m+1}{1} \right) \frac{a}{1} = \frac{a}{1}$  वर सिद्ध केल्या प्रमाणे.

$a = \left( \frac{v-1}{1} \right) m = \left( \frac{v-1}{1} \right) \frac{a}{1}$

$$न = \frac{\text{ला०म-ला०व}}{\text{ला०च}} = \frac{\text{ला०}(\text{मव-म+अ})}{\text{ला०च}}$$

$$\text{ला०च} = \frac{\text{ला०म-ला०व}}{न}$$

$$रु = \left(\frac{\text{च-म}}{\text{च-न}}\right) अ - \left(\frac{\text{च-म}}{\text{च-न}}\right) अ = \left(\frac{\text{च-म}}{\text{च-न}}\right) \frac{अ}{च-न}$$

### उदाहरणें

(१) ४०० रु० दरवर्षाची प्राप्ति ५ वर्षे पर्यंत अवरोद्ध राहिली तिचे दरसाल दरशेंकडा ४ रु० चक्रवाद व्याजाचे दरानें व्याजमुद्दल काय होईल?

$$\frac{(१००४)^{५}-१}{०.०४} \times ४०० = २१६६०० \dots ५०५१६ \text{ रास हें उत्तर}$$

(२) दरसाल ३०० रु० प्राप्ति आज पासून १० वर्षे पर्यंत चालणार तिची दरसाल दरशेंकडा ३ रु० चक्रवाद व्याजाचे दरानें वर्तमान किंमत काय होईल?

$$\frac{(१००३)^{१०}-१}{०.०३} \times ३०० = २४९४०० \dots १५००० \text{ वर्त. किं०}$$

(३) दरसाल दरशेंकडा ३ रु० चक्रवाद व्याजाचे दरानें पांचवर्षांनी व्याजमुद्दल रु० ४०० आणून दिले तेव्हां मासिक काय होती?

$$\frac{(१००३)^{५}-१}{०.०३} \times ४०० = १७५००० \dots ११४१२ \text{ मासि हें उत्तर}$$

### अनंत श्रेणी

ही अनंत श्रेणी जात संयुक्त पदभाजक आहे अशा भागाकारा पासून अथवा संयुक्त करणी पदाचें मूळ काढल्या पासून किंवा दुसरे कांहीं सामान्यरीतीनें उसनहोने ही कितीही वाढविलीतरी अनंत पावत नाही जसें अंकगणितांत आवर्तदशांदां

\* ही अनंत श्रेणी डाक्टर बाळिल साहेब याणी  $\frac{अ}{१-र}$  हें अपूर्ण बीज चालवत भागाकारानें भागिल्या पासून मगदकली.

प्रथमकृत्य.

अपूर्ण पदास भागाकाराने अनंत श्रेणीचे रूप द्यावयाचे.  
रीति भागाकाररीतीने अंदा, छेदांनी भागावे आणि हे भागाकार  
कृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढ्याचे, ह्मणजे इच्छिते रूप होईल.

(१) ~~वसु~~ यास अनंत श्रेणीचें रूप दे.

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

五十一 \*

\* - अ  
न अ न अ २

\* अ३

अथर्व

५-७

(२)  $\frac{\text{अ}}{\text{अ+क्ष}}$  यास अनन्त श्रेणीचें रूप दे

उत्तर,  $1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \dots$

दुसरें कृत्य.

संयुक्त करणी पदास अनंत श्रेणीचे रूप द्यावयाचे.

रीति. गणितरीतीने त्याचे मूळ काढावे आणि हे मूळ कृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावे. या रीतीने वर्गमूळ मात्र अनावधान निघे ल.

उदाहरणं.

(१) अ-बो माचे अनंत श्रेणीत मूळकाढ



पूर्णबीजाचे छेद अंश स्थयी आणि अंश छेद स्थयी प्रकाराक वि  
 न्द वदल करून आणिले पाहिजेत.

ही रीति आणि बीज वर्गघनादि करावयाची न्यूनवी रीति ही एक  
 च आहे.

### उदाहरणे.

(१) अ + व यांचे वर्गमूळ अनंत श्रेणीत काढ.

$$(अ + व)^2 = (अ)^2 + २(अ)(व) + (व)^2 = (अ)^2 + २अव + (व)^2$$

$$(अ + व)^2 = अ^2 + २अव + व^2$$

(२) (अ-व) यांची किंमत अनंत श्रेणीत काढ.

$$(अ-व)^2 = (अ)^2 - २(अ)(व) + (व)^2 = अ^2 - २अव + व^2$$

(३) (अ-व) यांची किंमत अनंत श्रेणीत काढ.

$$(अ-व)^2 = अ^2 - २अव + व^2$$

### भागदुसरा.

#### पथमकृत्य.

अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि कोणत्याही न पदांचा श्रेणीत मागील  
 पद पुढील पदांत यजा करून अंतर घेतली आणि त्या अंतरांची पु  
 न पुन्हा अंतर घेतली तर त्या पासून वेगळले प्रकार खाडी लिहि  
 त्या प्रमाणे सिद्ध होतात.

मूळ श्रेणी, अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि.

प्रथम अंतर परंपरा, ब-अ, क-ब, ड-क, ई-ड, फ-ई इत्यादि.

द्वितीय अंतर परंपरा, क-२ब+अ, ड-२क+ब, ई-२ड+क, फ-२ई+ड इत्यादि.



३री अं० प० ड-३क+३व-अ ई-३ड+३क-व, फ-३ई+३ड-क इ०

४थी अं० प० ई-४ड+४क-४व+अ, फ-४ई+४ड-४क+व इ०

५वी अं० प० फ-५ई+५० ड-५क+५व-अ इ०

याप्रमाणे न व्या अं० परंपरेची पदे २० वे व्याख्ये म० उलटीं मांडून,

न वी अं० प० ± अ न न व ± न  $\frac{व-३}{३}$  क न न  $\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$  ड ३४

$\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$  ई न इत्यादि ..... (१)

यांत न विषम असल्यास खालचें चिन्ह आणि सम असल्यास वरचें चिन्ह धरावें.

परंपरांचीं मध्यम पदे हाखवायास, प, प, प, प इ० पदे घेतलीं तर,

प = व-अ

प = क-३व+अ

प = ड-३क+३व-अ

प = ई-४ड+४क-४व+अ

१ लें पद, अ = अ

२ रे, व = अ+प

३ रे, क = अ+३व+प

४ थे, ड = अ+३प+३व+प

याप्रमाणे पहातीं नवें पद = अ + (न-१)प + (न-१)  $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$ प + (न-१)  $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$   $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$ प + (न-१)  $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$   $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$   $\cdot$   $\left(\frac{व-३}{३}\right)$ प + ३० ..... (२)

या समीकरणापासून कोणतेही श्रेणीचें कोणतेंही पद निघतें.

वरील समीकरणांची वेरीज घेऊन, अ+व+क+ड+ई+फ =

६अ+१५प+२०व+१५प+६प+प आहे याजकरिता, अ+व+

क+ड+ई न पदां पर्यंतची वेरीज न अ+न  $\frac{व-३}{३}$  प+न  $\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$

प+न  $\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$   $\frac{व-३}{३}$  प+इ ..... (३)

या समीकरणापासून कोणतेही श्रेणीचें नव्या पर्यंत सर्व धन होतें.

श्रेणीचीं पदे एकचें अंतरानें असल्यास दुसरे समीकरणापासून

मध्यस्थापनाचे योगानें कोणतेंही आंतील पद निघतें. यांत न मध  
मपदापासून सांगितले पदांपर्यंत अंतर दाखवि तो याजकरितां-  
कोणतेंही मधील पद य = अ + न - प + न  $\frac{प-१}{२}$  + न  $\frac{प-३}{२}$  +  
+ इ. .... (४)

मध्यम समीकरणातील पदांस स्थळांतर करून, कोणतेही श्रेणी  
चे मधील पद निघतें. जसें,  $\pm न \cdot \frac{प-१}{२} - क = \mp अ \pm न व \pm न \cdot \frac{प-१}{२}$   
 $\frac{प-३}{२} - ड$  न  $\cdot \frac{प-१}{२} - \frac{प-३}{२} - ई \pm$  इत्यादि. .... (५)

### उदाहरणें.

(१) १, ४, ८, १२, १६ इ. आणि १, ४, ८, १२, १६ इ. यादीनस्ये  
पद्याचे वजाव्यांचा वा वेगळाल्या परंपरा काढ.

१, ४, ८, १२, १६ इ. सूक्ष्म श्रेणी ..... १, ४, ८, १२, १६ इ.

२, ४, ६, ८ इ. .... म. अं. प. .... २, ४, ८, १२, १६ इ.

१, १, १ इ. .... दु. अं. प. .... १, ४, ८, १२, १६ इ.

०, ० इ. .... ति. अं. प. .... १, ४, ८ इ.

च. अं. प. .... १, ४ इ.

पां. अं. प. .... १ इ.

(२) १, ८, २७, ६४, १२५ इ. या श्रेणीची चवथी अं. परंपरा काढ.

म. समी. प्रमाणे च. अं. प. = १ - ४ - ८ + ४ - २७ - ४ - ६४ +

४ - २७ - ४ - १२५ - + इ. १ - १२, १६२, - २५५, १२५ = ० इ. उ.

(३) २, ६, १२, २०, ३० इ. या श्रेणीचे १० वे पद काढ.

२, ६, १२, २०, ३० इ. सूक्ष्म श्रेणी

४, ६, ८, १० इ. म. अं. प. } यांत प = ४

२, ३, ३, ३ इ. दु. अं. प. } प = ३

०, ० इ. ति. अं. प. } प = ०

दु० समी० प्र० यांत (न-१) = ९, २ + ९ - ४ + ९ - ४ - २ = १२०, १० वे पद उ०

(१) १, ४, ८, १३, १९ इ० श्रेणीचे २५ पदांपर्यंत सर्व धन काय आहे?

तिसरे समी० प्र० १, ४, ८, १३, १९ इ० सू० श्रे०

$$\left. \begin{array}{l} १, ४, ९, १६ इ० प्र० अ० प० \\ १, १, १ इ० दु० अ० प० \\ ०, १ इ० ति० अ० प० \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{यांत प} = ३ \\ \text{प} = १ \\ \text{प} = ० \\ \text{न} = २५ \end{array}$$

$$२५ \cdot १ + २५ \cdot \frac{३-१}{२} = ३ + २५ \cdot \frac{३-१}{२} = ३ + २५ \cdot १ = २२५ \text{ सर्व हे उ०}$$

(५) ३, ४, ३, ४, ३, ४, ३, ४ इ० यांचा लाग्रतमीक भुज्यासां  
भित्त्या आहेत. यापासून ३, ४, ३ यांची लाग्रतमीक भुज्याकाद

$$\text{चवथे समीकरणा प्र० यांत न} = (३ - ४ + ३ - ४) = २ - १ = १$$

$$०.०२०३३६६, ०.०३१६०८२, ०.०४३०२७२, ०.०५४३४९५ इ० सू०$$

$$०.०६५६७१६, ०.०७७०९३०, ०.०८८४१४३ इ० प्र०$$

$$-०.०९९७३५६, -०.११०९५६० इ० दु० प०$$

$$-०.१२२०७७१ इ० ति० प०$$

$$\text{यांत प} = ०.०२३५१६, \text{प} = -०.०००१२६, \text{प} = ०.००००००१$$

$$\text{भु० (३ - ४ + ३ - ४)} = ०.०२०३३६६ + \frac{३}{२} \times ०.०२३५१६ + \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} \times$$

$$-०.००००१२६ + \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} \times -०.००००००१ = ०.०३३५४५०२ \text{ हे उ०}$$

### दुसरे कृत्य

वजावाकीचे रीतीने श्रेढीचे सर्व धन काढावयाचे

रीति. सांगितले श्रेढीचे सर्व धन सारून प्रथम पदास स्थानंतर करा  
वें आणि त्यास असा एक गुणक किंवा भाजक लावावा की, जेणेकरून  
श्रेणीचा डावे कडील पदे प्रथम श्रेणीतील डावे कडील पदाबरोबर

वरहोईल. नंतर दोन समीकरणाची वजाबाकी करून त्यापासून उत्तर काढावे.

### उदाहरणे.

(१)  $\frac{१}{३}, \frac{१}{६}, \frac{१}{८}, \frac{१}{१२}, \frac{१}{२४}$  या श्रेढीचे सर्वधन काढ.

$$\frac{१}{३} + \frac{१}{६} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१२} + \frac{१}{२४} = स, \text{ स्थ. क. } \frac{१}{३} + \frac{१}{६} + \frac{१}{१२} + \frac{१}{२४} = स - \frac{१}{२}$$

$$२नी गु. \frac{१}{३} + \frac{१}{६} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१२} + \frac{१}{२४} = २स - १ \text{ यांत पूर्व समीकरण वजा क.}$$

$$० = स - १ \therefore स = १ \text{ हे उ. अथवा स} = \frac{१ - १}{१ - १} \times \text{अ यांतर अपूर्ण}$$

$$\text{णांक असून गळ अनंत आहे. याजकरिता स} = \frac{अ}{१ - १} = \frac{१}{१ - १} = १$$

भूमिति श्रेढीत सिद्ध केव्या.प्र.

(२)  $११६, ११६, ११६, ११६, ११६$  इ. याची किंमत व्यवहारी अपूर्णांकां

त काढ.

उत्तर,  $\frac{११६}{२२२}$

### चिन्हांविषयी.

पदांविंचून जसे सामान्य धर्म असता नाहींत, व त्यांचे नियम करितां येत नाहींत, त्याप्रमाणेच पदांविंचून चिन्हांचे नियम सांगतां येत नाहींत, याजकरितां पदां श्रयाने चिन्हांचे विचार.

व्याख्या.

१ धन पद तेच आहे, जें पद जमा अथवा शिद्धक आहे. जसें + १ अथवा जे १ अ मध्ये जितकी संख्या आहे, त्याचे ति पद काही तरी शिद्धक अ. जमा आहे.

२ ऋण पद तेच आहे, जें पद स्वर्च, कमी अ. कर्त आहे. जसें - १ अथवा जे १ अ मध्ये जितकी संख्या आहे, त्याचे ति पद कर्त कमी अ. दणे आहे.

प्रथम प्रकार.



## मिथवणी.

१ धन धन पदांची बेरीज धन, कारण विलकेंत आणखी विलक मिथ विली, तर विलकच वाढत जाईल.

२ धन ऋण पदांची बेरीज धन अ० ऋण. जर धन पद मोठें आणि ऋण पद लहान असेल, तर बेरीज धन; ह्मणजे जास्त जमेशीं कमी खर्च मिळविला असतां, जमा (धन) राहाते. जर धन पद लहान आणि ऋण पद मोठें, तर बेरीज ऋण. ह्मणजे कमी जमेशीं जास्त खर्च मिळविला असतां ऋण (खर्च) राहतें.

३ ऋण ऋण पदांची बेरीज ऋण. ह्मणजे कर्जाचा किती ही रकमा घेतल्या तरी कर्ज (ऋण) होतें.

(१)  $१७अ + १७अ = ३४अ$     (२) उदाहरणें.    (३)  $१७अ - १७अ = ०अ$     (४)  $१७अ - १७अ = -१७अ$

## दुसरा प्रकार.

## वजावाकी.

१ धन धन पदांची वजावाकी धन अ० ऋण, कारण धन वजाकरणें ह्मणजे प्रथम प्रकाराप्र० ऋण मिळविणें.

२ ऋण ऋण पदांची वजावाकी धन अ० ऋण होणे. कारण ऋण वजाकरणें ह्मणजे धन मिळविणें. जसें एकामलाच्यानं २अ रु० देणें आहेत, ते देण्याकरितां २अ धन असल्या वाचून देतां येणार नाहीत. तेव्हां ऋण वजाकरणें ह्मणजे धन मिळविणें.

३ धन ऋण अ० ऋण धन पदांची वजावाकी धन अ० ऋण. बेरीजमकाम.

## उदाहरणें

(१)  $१७अ - (३अ) = +१४अ$     (२)  $१७अ - (१७अ) = ०अ$     (३)  $१७अ - (१७अ) = -१७अ$     (४)  $१७अ - (१७अ) = ०अ$     (५)  $१७अ - (१७अ) = -१७अ$



## तिसरा प्रकार.

### गुणाकार.

१ धन धन पदांचा गुणाकार धन हणजे धनरकसा कितीही नेमां घेतल्या तरी धन होतात.

२ धन ऋण अ. ऋण धन पदांचा गुणाकार ऋण कारण ऋण रकसा कितीही नेमां घेतल्या तरी ऋण होतात.

३ ऋण रकस ऋण नेमां घेणे हणजे दु. प्रकारांत सांगितल्याप्र. धन मिळविल्या प्रमाणें आहे. जसे, (अ-अ) = ० यास-क याणें गुण. (अ-अ) × -क = ०, मत्स्यशु. मध्य. पदांचा गुणा. - अक, आतां दुसऱ्या पदाचा अ. अक हानिभय अधिक असेल, तेव्हां दोनही पदांची विरोध झाल्यावर होईल.

### उदाहरणें

$$\begin{array}{l|l} (१) +४अ \times +३अ = +१२अ & (२) -४अ \times +३अ = -१२अ \\ (३) +४अ \times -३अ = -१२अ & (४) -४अ \times -३अ = +१२अ \end{array}$$

### चवथा प्रकार.

### भागाकार.

१ भागाकार गुणिले भाजक = भाज्य आहे याज करितां भाज्य भाजक दोनही धन आहेत तेव्हां भागाकार धन होऊ पड आहे.

२ भाज्य आणि भाजक दोनही ऋण आहेत तेव्हां भागाकार धन कारण धन भागा. ऋण भाजकानें गुणिला असतां भाज्य ऋण होतो.

३ ऋण भाज्य आणि धन भाजक अथवा धन भाज्य आणि ऋण भाजक यांचा भागाकार ऋण. कोणता ऋण भागाकार धन भाजकानें गुणिल्यास धन भाज्य अथवा ऋण भागाकार ऋण भाजकानें गुणिल्यास धन भाज्य.

## उदाहरणें.

$$\begin{array}{l|l} (१) +०अ \div +४अ = +२अ & (३) -०अ \div +४अ = -१अ \\ (२) +०अ \div -४अ = -२अ & (४) -०अ \div -४अ = +२अ \end{array}$$

## पांचवा प्रकार.

## वर्गघनादि.

१ धनपदांचे सर्व घात धन.

२ ऋणपदांचे समघात धन आणि विषमघात ऋण. कारण ऋण ऋणपदांचा गुणाकार ति. प्रकारांत सांभि. प्र. धन आणि त्यास पुनः ऋण पदांचे गुणित असता, त्याच प्रकाराप्र. ऋण होतो.

$$\begin{array}{l|l|l|l} (१) & (२) & (३) & (४) \\ (+४अ)^३ = ६४अ^३ & (-४अ)^३ = -६४अ^३ & (+४अ)^३ = ६४अ^३ & (-४अ)^३ = -६४अ^३ \end{array}$$

## सहावा प्रकार.

## वर्गघनादि मूळें.

१ धनपदांची समघात मूळें धन आणि ऋण. कारण धन अथवा ऋण पदांचे समघात सरील नकाराप्र. धन होतात धनपदांची विषमघात मूळें घात नकाराप्र. धन.

२ ऋणपदांची विषमघात मूळें ऋण आणि समघात मूळें अवाक्य. कारण धन अथवा ऋणपदांचे कोणतेही समघात ऋण होत नाहीत.

## उदाहरणें

$$\begin{array}{l|l|l|l} (१) & (२) & (३) & (४) \\ (+४अ)^{\frac{१}{३}} = २अ & (-२५६अ)^{\frac{१}{३}} = -६अ & (+८अ)^{\frac{१}{३}} = २अ & (-८अ)^{\frac{१}{३}} = -२अ \end{array}$$

# गणितसार.

## भागचवथा.

### लाघतंम.

लाघतंम गुणजे गुणोत्तराचे संख्येत घातप्रकाशक आहे.  
जसे  $प^१ = व$  असेल, तर  $व$  संख्येचे लाघतंम  $क$  आहे, प गुणोत्तराने  
अथवा पाथाने.

कठिण हिरो व सगम होण्यासाठी लाघतंमे केली आहेत; तीं हेंक  
रितात कीं, मिळवणीने गुणाकार, वजाबाकीचे भागाकार, घातप्रका  
शकाने गुणिल्याने, घातादि रुद्धी आणि मूळ प्रकाशकाने भागिल्याने  
घातादि मूळ.

कोणती ही भूमिति येदी इतक्या घाता पासून वढत किंवा उतरत गेली,  
विज करितां घातप्रकाशक (लाघतंमे) गणित येदी इतक्या पासून  
हे सिद्ध करण्यासाठी अवक अथवा २, ३, १० ही पदे वेळन.

मथमप्रकार.

$$\left. \begin{aligned} अ \times अ &= अ^२ = अ^२ \\ व \times अ &= वअ = वअ \\ के \times के &= के^२ = के^२ \end{aligned} \right\} \text{गुणाकार}$$

$$\left. \begin{aligned} २ \times २ &= ४ = ४ \\ ३ \times ३ &= ९ = ९ \\ ४ \times ४ &= १६ = १६ \\ ५ \times ५ &= २५ = २५ \\ ६ \times ६ &= ३६ = ३६ \\ ७ \times ७ &= ४९ = ४९ \\ ८ \times ८ &= ६४ = ६४ \\ ९ \times ९ &= ८१ = ८१ \end{aligned} \right\}$$

सावरून सिद्धांत- घातप्रकाशकांची (लाघतंमोची) बेरीज मूळ संख्ये  
चे लाघतंम होते.



एक उत्तरा में चढ़त किंवा उत्तरत आइत जमें .....

४	२	२	१	०	१	२	३	४	ग० भे० अ० ला०
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$	१	२	४	८	१६	वालील भेदपावी
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$	१	२	४	८	१६	भूमिति भेदी
$\frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^1}$	१	३	९	२७	८१	भूमिति भेदी
$\frac{1}{10000}$ , $\frac{1}{1000}$ , $\frac{1}{100}$ , $\frac{1}{10}$	१	१०	१००	१०००	१००००	भूमिति भेदी			
$\frac{1}{10000}$ , $\frac{1}{1000}$ , $\frac{1}{100}$ , $\frac{1}{10}$	१	१०	१००	१०००	१००००				
$\frac{1}{10^4}$ , $\frac{1}{10^3}$ , $\frac{1}{10^2}$ , $\frac{1}{10^1}$	१	१०	१००	१०००	१००००				

तुल्यप्रकार

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^4} : \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^1} = 1 \\ \frac{1}{3^4} : \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^1} = 1 \\ \frac{1}{10^4} : \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^1} = 1 \end{array} \right\} \text{भागा०}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^4} : \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^1} = 1 \\ \frac{1}{3^4} : \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^1} = 1 \\ \frac{1}{10^4} : \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^1} = 1 \end{array} \right\}$$

यावत्तु सिद्धत, घातमकाशकावी (लाघतंभावी) वलावाकी त्या दोन संख्यांचे भागाकाराचे लाघतंम होते.

तिसरा प्रकार

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 = 2 = 2 \\ 3 \times 3 \times 3 = 3 = 3 \\ 10 \times 10 \times 10 = 10 = 10 \end{array} \right\} \text{वगादि}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 = 2 = 2 \\ 3 \times 3 \times 3 = 3 = 3 \\ 10 \times 10 \times 10 = 10 = 10 \end{array} \right\}$$

यावत्तु सिद्धत घातमकाशकास (लाघतंभास) सांगितले घातमकाश काने सुगुल असता, त्यास रम्येचे वगादिकाचे लाघतंम होते.

चवथा प्रकार

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 2 = 2 = 2 \\ 3 \times 3 = 3 = 3 \\ 10 \times 10 = 10 = 10 \end{array} \right\} \text{घातादिप्रकार}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 2 = 2 = 2 \\ 3 \times 3 = 3 = 3 \\ 10 \times 10 = 10 = 10 \end{array} \right\}$$

सांत स्पष्ट आहे की, एकच स्वाभाविक संख्येस लाग्रतमाचा प्रति  
अनेक आहेत, जसे वरचा भूमिति श्रेदीत २, ३, १० इ. अथवा दुसरे  
कोणते ही श्रेदीत.

जी लाग्रतमे कामांत फार उपयोगी पडतात, यांस अज्ञा भूमिति  
श्रेदीची संबंध केली आहेत की, जा श्रेदीची पदे दशांश गुण वाढतात.  
जसे पूर्व श्रेद्यांतील श्रेदील श्रेदी. सांगत बहुत करून पुस्तकांत  
जे लाग्रतम कोष्टक आहेत, ते याच श्रेदी पासून उत्पन्न केले आहेत.  
या लाग्रतमास व्यवहारीक लाग्रतम म्हणतात. आणि याचा पाया  
१० आहे. विवाय जाचा पाया २, ७१, २९, २९, २९, २९, २९, २९ आहे त्यास हे  
पबलिक लाग्रतम म्हणतात.

पायाचें लाग्रतम कोणत्या ही लाग्रतमाचे जातींत एक असतें. ज  
से वरील तिन्ही श्रेद्यांत २, ३, १० हे पाये असून त्याचे लाग्रतम एक  
आहे.

**कोणत्याही संख्येचे लाग्रतम काढणे.**

प्रथम रीति. जेव्हां संख्या १ आणि १० अथवा १० आणि १०० अ  
थवा १०० आणि १००० इ. यांचे मध्ये आहे तेव्हां दोन सविध सं  
ख्यांचे भूमिति मध्यप्रमाण काढावे, असे की, यांचे मध्ये इष्टिची  
संख्या आहे. नंतर इष्टिची संख्या या भूमिति मध्यप्रमाणाहून  
अधिक असेल तर हे भूमिति मध्यप्रमाण आणि मोठी संख्या या  
चे पुनः मध्यप्रमाण काढावे. आणि संख्या याहून कमी असेल त  
र हे मध्यप्रमाण आणि लहान संख्या यांचे मध्यप्रमाण काढावे.  
यावरून सिद्धान्त - घात प्रकाशकास (लाग्रतमास) सांगितले घात प्रकाश  
प्रकाशकाने भागिल्याने त्या संख्येचे इष्टिचे घातचे लाग्रतम होई.



यामाणें इच्छिती संख्या अथवा तिचे अतिसंनिध दुसरी संख्या मध्य  
प्रमाणानें येई पर्यंत करावे. आणि तितकीं वजवीं भूमिति मध्यम  
माणें काढितीं, तितकीं वजवीं त्या दोन मूळ संख्यांचे लाग्रतमांचीं  
गणित मध्यप्रमाणें काढावीं. स्पष्टाजे तीं अनुक्रमानें त्या त्या भूमिति  
मध्यप्रमाण पदांची लाग्रतमें होतील.

### उदाहरणें.

(१) ६५ या संख्येचें लाग्रतम काढ. इच्छिती संख्या १ आणि ० या  
चे मध्यें आहे यात करिवा

संख्या.

लाग्रतम.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 \times 90} &= 3.16227766 \dots \frac{0+1}{2} = .5 \\
 \sqrt{10 \times 3.16227766} &= 5.6234132 \dots \frac{1+.5}{2} = .75 \\
 \sqrt{10 \times 5.6234132} &= 7.5000000 \dots \frac{1+.75}{2} = .875 \\
 \sqrt{10 \times 7.5000000} &= 8.6602540 \dots \frac{1+.875}{2} = .9375 \\
 \sqrt{10 \times 8.6602540} &= 9.3060781 \dots \frac{1+.9375}{2} = .96875
 \end{aligned}$$

(२) ६५ या संख्येचें लाग्रतम काढ.

उत्तर, १.०१२९१३

दुसरीरीति. आ संख्येचें लाग्रतम काढणें ती संख्या = व चे आ  
णि ती संख्या एकानें उणी = अ चे तेव्हां व + अ = २५-१ = २४ + १ = स  
तेव्हां ला. (५) = ला. व - ला. अ =  $\frac{565555555}{5} + \frac{555555555}{5}$   
+  $\frac{555555555}{5}$  + इ. अ. ला. व = ला. अ +  $\frac{555555555}{5}$  ×  
(१ +  $\frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$ )

अथवा.

$$\frac{०६८५८८१६३८}{८} = अ$$

अ  
ब  
क  
द

$$= ब.  
= क  
= द$$

$$अ \div १ = अ$$

$$ब \div २ = ब$$

$$क \div ५ = क$$

$$द \div ८ = द$$

इत्यादि.

ह ही सर्वभा.वे.

याजकरिता ला.ब = ला.अ + इ.

## लाग्रतंमाची उपपत्ति.

(ब) कोणी एक संख्या असेल, आणि ती संख्या एकाने उणी = अ आ

णि अ + ब = स असेल तर, ला. ब = ला. अ +  $\frac{०६८५८८१६३८}{८} \times ($  $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{१}{८} + \frac{१}{८} + इ०)$  होईल.

कारण इच्छित्या लाग्रतंमाचा पाया (९) आणि इच्छित्या संख्येचे

लाग्रतंम (६) आदे असे मजात आणावे. तर लाग्रतंमाचा गुणा प्र

माणे प = ब यांत प = १ + म आणि ब = १ + अ असे लिहून,  $(१ + म)$ 

= १ + अ या समीकरणाचा य घात करून, दोही बाजूतून १ रद्द क

रून, यमं भागून, नंतर य अ (०) किंमत देऊन आणि साधारण गुण

क सोडवून, हे होते. क्ष = ला. (१ + अ) =  $\frac{अ - \frac{१}{२}अ + \frac{१}{५}अ - \frac{१}{८}अ + - इ०}{१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{५} - \frac{१}{८} + - इ०}$ यांवर मची किंमत लिहून, क्ष = ला. (१ + अ) =  $\frac{अ - \frac{१}{२}अ + \frac{१}{५}अ - \frac{१}{८}अ + - इ०}{(१ - \frac{१}{२}) - \frac{१}{५}(१ - \frac{१}{२}) + \frac{१}{८}(१ - \frac{१}{२}) + - इ०}$ 

= ग धरिल्याने वरी

ल समीकरणास हे रूप होते. क्ष = ला. (१ + अ) = ग  $(अ - \frac{१}{२}अ + \frac{१}{५}अ - \frac{१}{८}अ + - इ०)$ 

= इतर समी.

दुसरे समी.



केत्यास वरचा समीकरणातील छेदस्थळीचे पद (१) हा प्रजे पा  
याचे लाग्रतम आहे. यास्तव  $p=10$  कसिल्यास व्यवहारीक भे  
दीतील स्थिरगुणक  $g = \frac{1}{\text{हा. ला. १०}}$

आतां हे  $\text{हा. ला. १०} = \text{ला. २} + \text{ला. ५}$ ,  $\text{ला. २} = 0 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{7 \times 3} + \dots) = 0.693147$  सहावे समीकरणाप्रमाणे  
 $\text{ला. ५} = 2 \text{ ला. २} = 1.386294$ ,  $\text{ला. ५} = 1.386294 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{7 \times 3} + \dots) = 1.6094379$  यास्तव हे  $\text{हा. ला. १०}$   
 $= \text{ला. २} + \text{ला. ५} = 0.6931472 + 1.6094379 = 2.3025851$   
हा प्रून  $g = \frac{1}{\text{हा. ला. १०}} = \frac{1}{2.3025851} = 0.4342944$  ही किंमत सहा  
वे समीकरणात ठेवून त्यास हे रूप होते  $\text{ला. (१+७)} = \text{ला. ७} +$   
 $0.6931472 \times (1 + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{7 \times 3} + \dots)$  हे सिद्ध.

गची किंमत निर्माण झाल्यावर व्यवहारीक भेदीतील लाग्र  
तमास हे पबालिक किंवा दुसरे भेदीत नेणे झाल्यास फलभ हो  
ईल.

### उदाहरणे.

(१) २ या संख्येचे लाग्रतम काढ.

एथें इडिली संख्या २=२ आणि त्यापेक्षा एकाने उणी संख्या १  
=१ आहे आणि  $2+1=3$  आणि  $2-1=1$  आहेत तेजां लाग्रत  
म कोष्टका प्रमाणे.

३) ०६०५००१६४	१) ००१५२९६५४ (२०१५२९६५४
४) २०९५२९६५४	३) ३२९६९९६२ ( १०७२३३२१
१) ३२९६९९६२	५) ३५७४४४० ( ७१४८८०
२) ३५७४४४०	७) ३९७१६० ( ५६७३७



(८)

१)	४९७१६० (९)	४४१२९ (	४९०३
२)	४४१२९ (११)	४९०३ (	४४६
३)	४९०३ (१३)	४४६ (	४२
४)	४४६ (१५)	४२ (	४
५)	४२ (१७)	४ (	

३वें लाग्र. ३०१०२९९५

१वें लाग्र. ....

२वें लाग्र. ३०१०२९९५ हैं उत्तर.

(२) ३वा संख्येचें ला. काढ.

प्रथम उदाहरण समाने रुतिका न हें होतें. ४७७१२९२५५ हैं उत्तर.

(३) ४वा संख्येचें ला. काढ.

(४) ९वा संख्येचें ला. काढ.

२४२=४ याज करितां २वें लाग्र.

३४३=९ याज करितां ३वें लाग्र.

तंम = ३०१०२९९५ यांत २

तंम = ४७७१२९५५ यांत ३वें ला

वें ला. मिळवून ४वें लाग्र. =

प्रतंम मिळवून ९वें लाग्र तंम =

४०२०५९९९१ हैं उत्तर.

९५४२४२५०- हैं उत्तर.

वर लिहिल्या रीतीनीं ७, ११, १३, १७, १९, २३ इ. संख्यांची लाग्रतंम काढल्यानंतर गुणाकारानें आणि भागाकारानें दुसरीं अनेक संख्यांचीं लाग्रतंम काढितां येतीक.

**लाग्रतंम कोष्टक कामांत घेण्याची रीति.**

एका पेक्षा अधिक पूर्ण संख्यांची लाग्रतंम काढण्याचा रीति वर लिहिल्या आतां अपूर्ण संख्यांचीं लाग्रतंम काढण्याचा रीति लिहिती.

सामान्यता: सरूप सर्व संख्या पूर्णांक, अपूर्णांक अथवा मिश्र



कक्षा ही असोत, तथापि त्यांचे लाग्रतंमीक दशांश एकच आ-  
णिते सर्वदा धन असतील. प्रकाशक मात्र धन किंवा ऋण होती-  
ल. जसें, ५१२ या संख्येचें लाग्रतंम २.७०९२७० आहे. आणि या  
संख्येचे १०, १००, १००० इत्यादि यांची लाग्रतंमें खाली लिहिल्या  
प्रमाणें होतील.

संख्या लाग्रतंमें

५१२ . . . . . २.७०९२७०	} यावरून स्पष्ट आहे की, संख्येत पू- र्णांक स्थले जिनकी आहेत, त्यांत ए- ककमी धन प्रकाशक आणि पूर्णां- क नसून दशांशच आहेत, तेव्हा दशां- शाचा प्रथम अंक जितके स्थाने वर आहे तितके ऋण प्रकाशक करवें.
५१.२ . . . . . १.७०९२७०	
५.१२ . . . . . ०.७०९२७०	
०.५१२ . . . . . ०.७०९२७०	
००५१२ . . . . . २.७०९२७०	

**कोष्टकांतून कोणतेही संख्येचें लाग्रतं काढणें**

**प्रथमरीति.** जेव्हां संख्या दहाचें आंत आहे तेव्हां संख्या शब्दा

+ ५१२ कोणी एक संख्या असेल तर, तिचे बराबर १०० दहा पूर्णांकाचे मान  
कोणती तरी धन संख्या आहे, सणजे एथें ५१२ आहे याचें बराबर (अ) चे आली  
मार्गे सोपिल्या प्रमाणें १ आणि १०० यांचे मधील कोण संख्येचें अ० दान्यप्र० व कांहीतरी द०  
सणजे एथें ७०९२७ आहेत, याचें बराबर व घे. आता ५१२ किंवा त्याचें द० १००  
इत्यादिकाचें लाग्रतंमा विषयी विचार

$५१२ = १०० \times अ, ५१.२ = \frac{५१२}{१०} = १० \times अ, ०५१२ = \frac{५१२}{१००} = \frac{१० \times अ}{१००}$  यांत लाग्र

तंमाचा नियमाप्रमाणें ला० (१०) + ला० अ = २ + व = २.७०९२७

ला० (१०) + ला० अ - ला० (१०) = २ + व - १ = १ + व = १.७०९२७

ला० (१०) + ला० अ - ला० (१०) = २ + व - ४ = -२ + व = -२.७०९२७

यावरून पहातां साधारण एकच संख्या पूर्णांक, अपूर्णांक अथवा मिश्र कवी  
ही असो. तसे विचें लाग्रतंमीक दशांश एकच असून ते धन आहेत आणि प्रका-  
शक मात्र भिन्न आहेत हें सिद्ध.

चे समोर अंक लिहिले आहेत, ते पाहून त्यांचे खाली द्यावे  
समोरील त्या त्या संख्येचे लाग्रतंम घ्यावे. आणि त्या सवर सांगित  
तल्या प्रमाणे प्रकाशक लिहावा.

**दुसरीरीति.** जेव्हा संख्या १०० हून अधिक आणि १००० चे आत  
आहे अथवा संख्येत दोन अंक स्थाने आहेत तेव्हा संख्या शब्दा  
चे खाली दोन दोन अंकांचा ओळी आहेत त्यांत ते अंक पाहून  
त्या अंकाचे समोर लाग्रतंम लिहिले आहे ते घ्यावे आणि त्या स  
रीती प्रमाणे प्रकाशक लिहावा. जसे ६५ या संख्येचे ला० १००११११

**तिसरीरीति.** जेव्हा संख्या १००० चे वर आणि १०००० चे आत  
आहे अथवा संख्येत तीन अंक स्थाने आहेत त्यांत संख्येचा  
वरील तिसरा अंक असेल तो पाहून त्या खाली पूर्व दोन अंकां  
चे समोरील कोष्टकांतील अंक घेऊन, मागे दशांश बिन्दू करावे.  
आणि त्या सरीती प्रमाणे प्रकाशक लिहावा. जसे ६४८ या सं-  
ख्येचे लाग्रतंम २०११५७ आहे.

**चवथीरीति.** जेव्हा संख्येत तिही पेक्षा अधिक स्थळे आहेत  
त, तेव्हा मध्यम डावे कडील तीन अंकांचे लाग्रतंम पुढीलरीतीने  
काढावे आणि त्याचे जवळचे अधिक लाग्रतंम घेऊन त्या दोन  
लाग्रतंमांची वजाबाकी व त्याचे संख्यांची वजाबाकी करून त्या  
दोन बाक्या काढाव्या, नंतर या प्रमाणे अंश शिक करावे. जशी दोन  
संख्यांची वजाबाकी संख्येतील बाकी राहिले अंकास :: तशी त्या  
दोन लाग्रतंमांची वजाबाकी संख्येचे लाग्रतंमास.

+ वजाबाकी करते वेळी दोन ही संख्या वर बसले इतकी घ्यावी की, मूळ संख्येत  
तिही हून जितकी अं क स्थाने अधिक आहेत.

आतां हे इच्छाफळ पूर्व लाग्रतंमांत जें लहान असेल त्यांत मि  
ळवून बेरीज घ्यावी आणि रीतिप्रमाणें प्रकाशक लिहावे; आणि  
जे हें सांगितल्या सर्व संख्येचें लाग्रतंम झालें

### उदाहरण.

३४.०९२६ या संख्येचें लाग्रतंम काढायाचें

३४.००० या संख्येचें लाग्रतंम = ५३१४ =

३४१००० या संख्येचें लाग्रतंम = ५३२७५

वजा १००० बाकी आणि वजा ००९२७ बाकी

तेव्हां जसे १००० : ९२६ :: ००९२७ : ००९१०६०२ इच्छाफळ

हे इच्छाफळ ऊनतर लाग्रतंम ५३१४ = यास मिळवून ५३२६५

यास संख्येंतील पूर्णांक स्थळां प्रमाणें प्रकाशक देऊन ५३२६५

हे सांगितल्या संख्येचें प्रकाशक कदा लाग्रतंम झालें

**सांगितले लाग्रतंमापासून संख्या काढावयाची**

### रीति.

सांगितलें लाग्रतंम कोष्टकांत होवून त्याची संख्या काढावी,  
आणि प्रकाशका वरून त्या संख्येत दशांश चिन्ह करावें.

परंतु जर सांगितलें लाग्रतंम कोष्टकांत बराबर मिळत नाही,  
तर त्या लाग्रतंमाहून एक अधिक आणि एक उणें आशीं दोन ला  
ग्रतंम कोष्टकांतून काढून त्यांची वजाबाकी व लाग्रतंमाचें सं  
ख्यांची वजाबाकी करावी. नंतर ऊनतर लाग्रतंम आणि सांगि  
तलें लाग्रतंम यांची वजाबाकी करून या प्रमाणें राशी कराव्या.  
ते संख्या व्यवहारी अपूर्णांक असल्यास मिश्रदशांश अपूर्णांक  
चे रूप देऊन, नंतर वर सांगितल्या प्रमाणें लाग्रतंम काढावें.

जशी लाघतंमांची वजाबाकी, खरें लाघतंम आणि ऊनतर लाघतंम यांचे वजाबाकीस, तशी संख्यांची वजाबाकी तिथे संख्येस म माण होते.

हे इच्छाफळ ऊनतर संख्येत मिळवावें आणि मकाशकावरून त्यास दशांश चिन्ह करावें. सणजे ही सांगितले लाघतंमांची संख्या होईल.

### उदाहरण.

(१) सांगितले लाघतंम १०८५५१ यांची संख्या काढ.

अधिकतर ०८५५०० याची संख्या ७३४०० सांगि. ला० ०८५५१

ऊनतर ०८५५१ ७३४०० ०८५५१

०००६०

१००

०००११

तरजसे, ०००६० : ०००११३ :: १०० : ३५५ हे इच्छाफळ ऊन तर लाघतंमास मिळवून ७३३५५ ही सांगितल्या लाघतंमांची संख्या झाली.

(२) २०८५५५ याची संख्या काढ.

उत्तर ०४४००

### लाघतंमानें गुणाकार करण्याची रीति.

गुण्य आणि गुणक यांचे लाघतंमांची बेरीज घ्यावी ती गुणाकाराचें लाघतंम होईल, त्या पासून पूर्वे रीतीने संख्या काढावी ती संख्या गुणाकार होईल.

लाघतंम दशांशांची बेरीज घेतेवेळीं चौवटी हात पायेईल, तो धन याज करितां मकाशक करून असल्यास त्यांत तो हातचा वजा



करावा आणि धनअसल्यास मिळवावा.

### उदाहरणे.

(१) २३-१४ यांस ५-०६२ यांनी गुण. (२) ०५८१९ यांस ३-४५७२० यां गुण.

संख्या.	लाघ.	संख्या.	लाघ.
२३-१४	= १-३५४३६ गुण्य	०५८१९	= २-७६४८६
५-०६२	= ०-७०४३२ गुणक	३-४५७२०	= ०-५३८७३
१७-१३४६	= २-०६८६८ गुणाकार	२०११८१	= -१-३०३५९

### लाघतं मानें भागाकार करण्याची रीति.

भाज्याचे लाघतं मांत भाजकाचे लाघतं म वजा करावें, बाकी राहील ती भागाकाराचे लाघतं म होईल, नंतर त्या पासून संख्या काढावी, तो भागाकार होईल.

वजा बाकी करतें वेळीं दशांशाचे शेवटास हात आयेईल. तो धन आहे तेव्हां भाजक मकाशक धन असल्यास त्यांत तो मिळवावा. आणि ऋण असल्यास वजा करावा. नंतर भाजक मकाशकाचे चिन्ह बदल करावें. त्यानं धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावें. मग दोघीं मकाशकांचीं चिह्नें सरूप असल्यास मिळवणी आणि विरूप असल्यास वजा बाकी करून त्या बाकी बाकीस अधिक मकाशकाचे चिन्ह जोडावे.

### उदाहरणे.

(१) ०६३१४ हे भाज्य ०७२४ या (२) ३७-१०१२ हे भाज्य ५२२-७६

भाजकांनी भाग.

भाजकांनी भाग.

संख्या.

लाघ.

उत्तर ०७००४



भाज्य  $\cdot ०६३१४ = -२८००३०$

भाजक  $\cdot ००७२४१ = -३८५९८०$

भागाका  $\cdot ८८७१९६ = ००९४०५०$

### लाघतमानेनैराशिककरण्याचीरीति.

पूर्णांकाचे रीतीप्रमाणेनैराशिकमांडून त्यांतजीं गुण्यगुणकप दें होतील, त्यांचे लाघतमाची बेरीज करून त्यांतून भाजकाचे लाघतम वजा करावे. तें इच्छा फळाचें लाघतम होईल. त्यापासून संख्या काढवी तें इच्छा फळ होईल.

### उदाहरणें.

(१) ३५ ग्यालन दारूची किंमत १०० पौंड आहे, तर ५७५ ग्यालन दारूची किंमत किती होईल?

ग्यालन ३५ यांस जेंर, याचें ला  $१००५३१४$  - हें बेरजेंतून वजा

ग्यालन ५७५ तर, याचें ला  $००७२४१$  } याची बेरीज.

पौंड १०० यांस, याचें ला  $२००००००$  }

पौंड १६९९१७६४ इ. याचें ला  $३३२८१९$  बाकी.

(२) भुजज्या ३२ : भुज  $६५$  :: वाज ३०० : किती?

उत्तर  $५९३००८३५$

### लाघतमानेनैवर्गादिककरण्याचें.

जा संख्येचें वर्गादिक करावयाचें त्या संख्येचें लाघतम सांगितले वर्गादिक मकाशकानें गुणवें तो गुणाकार सांगितले वर्गादिकांचें लाघतम झाडे, नंतर त्या पासून संख्या काढवी ती वर्गादिक होईल.

लाघतंम प्रकाशक ऋण आणि घात प्रकाशक धन आहे, ते  
ह्या गुणाकारांत दशांशाचे शेषही हातचा येईल, तो धन या  
अकरिता तो ऋण प्रकाशकाचे गुणाकारांत वजा करावा.

### उदाहरण.

(१) ३.०७१४६ याचा धन कर. (२) ०.२६५ याचा हे घात कर.

संख्या ३.०७१४६ = ०.४८७३४

उत्तर, ०.०४३१

धन प्रकाशक

धन २.००५५८ = १.४६२०२ ला.

### लाघतंमानेवर्गादिमूळकाढायाचे.

सांगितले संख्येचे लाघतंम मूळ प्रकाशकाने भागावे. भागा  
कार मूळाचे लाघतंम होईल. त्या पासून संख्या काढावी, ते मूळ.

जेव्हा लाघतंम प्रकाशक ऋण आहे आणि तो भाजकाने निः  
शेष भागत नाही, तेव्हा जितके अंकांनी वाढविले असता निः  
शेष भागेल तितके अंकांनी वाढवून भागावा, नंतर वाढविले  
अंक तितके दशांशाचे पूर्वी घेऊन त्यास भाजकाने भागावे.

+ कोणत्याही पदास कोणत्याही संख्येने गुणिले आणि तिथेच भागिले तर,  
त्या पदाचे किंमतीत काही बदल होत नाही हे उघड आहे. याने करिता उणे ला  
घतंम प्रकाशकास सांगितले घात मूळ प्रकाशकाने भाजित भाग वरावर भा  
त नाही तर भाग लागण्यास जितक्यांनी कमी आहे तितका प्रकाशक होण्यास  
योग्य अशा संख्येने लाघतंमाचे संख्येस गुणावे आणि भागावे जसे - ३.५७००८  
या लाघतंमास पांच यांनी भागणे आहे आणि - ३ यास पांचांनी भाग वरावर  
जात नाही कारण प्रकाशक ऋण असून दशांश धन आहे तो याने करिता त्या  
लाघतंम पदाचे मूळ संख्येस  $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} = 33.33$  यांनी गुणिले, अथवा  
मूळ पदाचे लाघतंमान हागने - ३.५७००८ यात या पदाचे लाघ-  
तंम मिळविले असता असे होईल. - ५ + २.५७००८ याने - ५ प्रकाशकास  
पांचांनी भाग वरावर जाईल.

## उदाहरणें.

(१) १९३४५ यांचें घनसूचकाद.

घनसंख्या १९३४५ ३) ४०९१४९

हें घनसूच. २३.१११६ ... १.३६३०३

(२) ००५६५२ यांचें पंच घातसूचकाद.

उत्तर, ५६३९९

(३) ११ यांचें घनसूचकाद.

उत्तर, ६४८५

संख्या १-३५ आणि १००-३५० पर्यंत

संख्या १-३५ आणि १००-३५० पर्यंत

संख्या १-३५ आणि १००-३५० पर्यंत









संख्या ५२ - ८५ आणि ५२० - ८५० पर्वत

कायतम ७०८५ - ९२९२२ पर्वत

संख्या के कायतम कोटि.									
पर्वत	१	२	३	४	५	६	७	८	९
५०	७०८५	७०९०	७०९५	७०९८	७०९९	७१००	७१०१	७१०२	७१०३
५१	७१०४	७१०५	७१०६	७१०७	७१०८	७१०९	७११०	७१११	७११२
५२	७११३	७११४	७११५	७११६	७११७	७११८	७११९	७१२०	७१२१
५३	७१२२	७१२३	७१२४	७१२५	७१२६	७१२७	७१२८	७१२९	७१३०
५४	७१३१	७१३२	७१३३	७१३४	७१३५	७१३६	७१३७	७१३८	७१३९
५५	७१४०	७१४१	७१४२	७१४३	७१४४	७१४५	७१४६	७१४७	७१४८
५६	७१४९	७१५०	७१५१	७१५२	७१५३	७१५४	७१५५	७१५६	७१५७
५७	७१५८	७१५९	७१६०	७१६१	७१६२	७१६३	७१६४	७१६५	७१६६
५८	७१६७	७१६८	७१६९	७१७०	७१७१	७१७२	७१७३	७१७४	७१७५
५९	७१७६	७१७७	७१७८	७१७९	७१८०	७१८१	७१८२	७१८३	७१८४
६०	७१८५	७१८६	७१८७	७१८८	७१८९	७१९०	७१९१	७१९२	७१९३
६१	७१९४	७१९५	७१९६	७१९७	७१९८	७१९९	७२००	७२०१	७२०२
६२	७२०३	७२०४	७२०५	७२०६	७२०७	७२०८	७२०९	७२१०	७२११
६३	७२१२	७२१३	७२१४	७२१५	७२१६	७२१७	७२१८	७२१९	७२२०
६४	७२२१	७२२२	७२२३	७२२४	७२२५	७२२६	७२२७	७२२८	७२२९
६५	७२३०	७२३१	७२३२	७२३३	७२३४	७२३५	७२३६	७२३७	७२३८
६६	७२३९	७२४०	७२४१	७२४२	७२४३	७२४४	७२४५	७२४६	७२४७
६७	७२४८	७२४९	७२५०	७२५१	७२५२	७२५३	७२५४	७२५५	७२५६
६८	७२५७	७२५८	७२५९	७२६०	७२६१	७२६२	७२६३	७२६४	७२६५
६९	७२६६	७२६७	७२६८	७२६९	७२७०	७२७१	७२७२	७२७३	७२७४
७०	७२७५	७२७६	७२७७	७२७८	७२७९	७२८०	७२८१	७२८२	७२८३
७१	७२८४	७२८५	७२८६	७२८७	७२८८	७२८९	७२९०	७२९१	७२९२
७२	७२९३	७२९४	७२९५	७२९६	७२९७	७२९८	७२९९	७३००	७३०१
७३	७३०२	७३०३	७३०४	७३०५	७३०६	७३०७	७३०८	७३०९	७३१०
७४	७३११	७३१२	७३१३	७३१४	७३१५	७३१६	७३१७	७३१८	७३१९
७५	७३२०	७३२१	७३२२	७३२३	७३२४	७३२५	७३२६	७३२७	७३२८
७६	७३२९	७३३०	७३३१	७३३२	७३३३	७३३४	७३३५	७३३६	७३३७
७७	७३३८	७३३९	७३४०	७३४१	७३४२	७३४३	७३४४	७३४५	७३४६
७८	७३४७	७३४८	७३४९	७३५०	७३५१	७३५२	७३५३	७३५४	७३५५
७९	७३५६	७३५७	७३५८	७३५९	७३६०	७३६१	७३६२	७३६३	७३६४
८०	७३६५	७३६६	७३६७	७३६८	७३६९	७३७०	७३७१	७३७२	७३७३
८१	७३७४	७३७५	७३७६	७३७७	७३७८	७३७९	७३८०	७३८१	७३८२
८२	७३८३	७३८४	७३८५	७३८६	७३८७	७३८८	७३८९	७३९०	७३९१
८३	७३९२	७३९३	७३९४	७३९५	७३९६	७३९७	७३९८	७३९९	७४००
८४	७४०१	७४०२	७४०३	७४०४	७४०५	७४०६	७४०७	७४०८	७४०९

आश्रयतंम १२९४२— १०००० पयसित.

संख्यांचे लाग्रतंमकोष्टक.

**B4**

अक्षरें	अर्थ	चिह्नें	अर्थ
अ०	अथवा.	=	बराबर.
आ०	आकृति.	∴	समूह.
इ०	इत्यादि.	∴	याजकरिता.
का०	काटकोन.	<	कोन.
का०चौ०	काटकोनचौकोन.	△	त्रिकोण.
किं०	किंवा.	△ न, △ चा	त्रिकोणांत, त्रिकोणाभाई.
चौ०	चौकोन.	□	चौकोन.
चि०	चिकोण.	◇	पंचकोण.
स०	समांतर.	○	वर्तुळ.
स०चौ०	समांतर बाजू चौकोन.	* >	पेक्षा मोठें.
स०आ०	सरूपाकृति.	<	पेक्षा लहान.

व्याख्या.

१ जास स्थिति मात्र आहे, परिमाण नाही, त्यास निंदू झणावें. (.)

२ जीस तांबी मात्र आहे, रुंदी आणि नाडी नाही, ती सरूपा

झणावें.

\* > साचि नावे अक्षरेल पद बाहेरील पदा पेक्षा मोठें समजावयावें.



रेषेचा दोहोंदोंकां जवळ एक एक अक्षर लिहून त्या अक्षरांनीं या-  
यः रेष उच्चारितान्. जसें अब रेष अनेक बिंदू एकाशीं एक संलग्न  
दिग्मानें रेष उत्पन्न होते.

३ दोन बिंदू मधील अति थोडें अंतर मापणा-या रेषेस सरळ रे-  
ष ह्मणावें.

४ जी रेष आद्यंत बिंदूवर सरळ न जातां दिशा बदलून  
गेली ती सवांकडी रेष ह्मणावें.

५ जी रेष कांहीं सरळ व कांहीं वांकडी आहे ती स मि-  
श्र रेष ह्मणावें.

६ जारेषांन बराबर अंतर राहिलें कधीं कितीही वाढ  
विल्यातरी एकत्र मिळत नाहीत त्यांस समांतर रेषा-  
ह्मणावें.

७ जी सलांबी व रुंदी आहे तीस पातळी ह्मणावें.

पातळीची मर्यादा रेष आहे.

८ जे पातळीवर कोठेंही दोन बिंदू घेतले असतां त्यांचा मधी-  
ल सरळ रेष सर्वांशीं पातळींत असते, त्या पातळीस सरळ पात-  
ळी ह्मणावें.

९ दोन दिशांस गेलेल्या दोन रेषांनीं दोकें एकत्र मि-  
ळतात त्या बिंदूस कोन ह्मणावें.

कोन स्थळीं नें अक्षर मध्ये घेऊन त्याच अक्षरांनीं  
कोन उच्चारितान्. एक बिंदू स्थळीं एकच कोन असल्यास-  
ती एक अक्षरानें उच्चारितान्.

१० एकरेष दुसरे रेषेवर उभी असून तिचे दोन बाजूंस



जि दोन कोन पडतात, ते बराबर असतील तर त्यांस मध्ये  
की काट. ह्मणावे. आणि काट. करणारी जी उभी रेखा तिला  
लंब ह्मणावे.

११ एकरेख दुसरे रेखेवर मिळून तिचे एके अंगास जे दो  
न कोन पडतात त्यांस परस्परांचे परस्पर पूरक कोन (स  
हिमें) ह्मणावे.

कोणताही कोन आणि काट कोन यांचा मधील अंतरा  
चा जो कोन त्यास भरतीचा कोन (काप्लिमेंट) ह्मणावे.

१२ जो कोन बराबर काट कोन न व्हे त्यास तिकैस कोन ह्मणावे.

१३ जो तिकैस कोन काट कोनाहून मोठा आहे, त्यास विशा  
क कोन ह्मणावे.

१४ जो तिकैस कोन काट कोनाहून लहान आहे, त्यास लघु  
कोन ह्मणावे.

१५ जाचे भोंवती मर्यादेचा रेषा आहे त त्यास आकृति अ  
से ह्मणावे कोणत्याही एका आकृति मध्ये जो अवकाश अस-  
तो त्यास क्षेत्र ह्मणावे. आणि त्याचे जें माप त्यास क्षेत्र फळ ह्मणावे.

१६ जी आकृति एका वांकड्या रेखेने वेष्टित असते व जाम  
ध्ये असा एक बिंदू असतो की, जा पासून त्या वांकडे रेखे व  
र्यंत अंतर सर्वत्र सारखें असतें, त्या आकृतीस वर्तुळ असे ह्मणावे व त्या  
वेष्टणाऱ्या रेखेस वर्तुळ परिघ व त्या विशेष बिंदूस वर्तुळ मध्य ह्मणावे.

१७ वर्तुळ मध्यापासून परिघापर्यंत जें अंतर त्या रेखेस  
त्रिज्या ह्मणावे.

१८ जी रेख वर्तुळ मध्यातून जाऊन परिघास दोहोंकडे



मिळते त्या रेघेस वर्तुळाचा व्यास ह्मणावें.

१९ वर्तुळाचा व्यास वर्तुळाचे वरावर दोन भाग करितो त्या मध्येक भागास अर्धवर्तुळ अथवा वर्तुळदृक् ह्मणावें.



२० जा आकृतीचा मर्यादा सरळ रेघा आहेत, तीस सरळ रेघाकृति ह्मणावें. आणि त्यांस बाजूचे संख्ये प्रमाणें नावें होतात. जसें त्रिकोण, चौकोन इत्यादि.



२१ जा आकृतीस चौहोंपेक्षा अधिक बाजू आहेत, तीस बहुकोनाकृति ह्मणावें.



२२ जा त्रिकोणाचा तीनही बाजू सम असतात त्यास समबाजू (समभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२३ जा त्रिकोणाचा दोन बाजू वरावर असतात त्यास समद्विबाजू (समद्विभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२४ जा त्रिकोणाचा तीनही बाजू वरावर नाहीत, त्यास विषमबाजू (विषमभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२५ जा त्रिकोणाचा एक कोन काटं. आहे त्यास काटं त्रिकोण ह्मणावें. का. त्रिकोणाचा काटकोनास मोरचा बाजूस कर्ण आणि दुसऱ्या दोन बाजूंन एकीस भुज व एकीस कोटी ह्मणावें.



२६ जा त्रिकोणाचा एक कोन विशाल असतो, त्यास विशालकोन त्रिकोण ह्मणावें.



२७ जा त्रिकोणाचे तीनही कोन छ पु असतात, त्यास छ पु कोन त्रिकोण ह्मणावें.



२८ कोणत्याही आकृतीचे सर्व कोन सम असल्यास तीस समकोनाकृति ह्मणावें. आणि सर्व बाजू वरावर असल्या-



सतीस सम भुजाकृति ह्यणावें.

२९ एका आकृतीचे सर्व कोन दुसऱ्या आकृतीचे सर्व कोनाबरोबर असल्यास त्या दोन आकृतींस परस्पर समकोनाकृति ह्यणावें. आणि जादोन आकृतींचा सर्व बाजूबरोबर असता त त्या दोन आकृतींस परस्पर सम भुजाकृति ह्यणावें.

३० जा आकृतीस चार बाजू आणि चार कोन आहेत तीस चौकोन अथवा चौकोन ह्यणावें.

३१ जा चौकोनांत समोरा समोरचा बाजू परस्पर समांतर आहेत त्यास समचौ. ह्यणावें.

३२ जा समचौने चारही कोन का. आहेत त्यास समचौ. ह्यणावें.

३३ समचौचा चारही बाजू बरोबर असल्यास त्यास चौरस ह्यणावें.

३४ जा समचौचा चारही बाजू बरोबर असून कोन तिकडे आहेत त्यास रॉबायद ह्यणावें.

३५ जा समचौचा बाजूंचा एक एक जोड परस्पर बरोबर आहेत त्यास रॉबायद ह्यणावें.

३६ जा चौकोनांत बाजूंचा एक जोड समांतर आहेत त्यास त्रैभुज ह्यणावें.

३७ जा चौकोनांत बाजूंचा एक जोड समांतर आहेत त्यास त्रैभुज ह्यणावें.

३८ जीरेष चौ.चे समोरा समोरचे दोन कोन सांघिषी तीस कर्णरेष ह्यणावें.

३९ कोणतेही आकृतीचे खालचे बाजू सपाचा ह्मणावे आणि बाकी बाजूंस बाजू ह्मणावे. आणि पायावर शिरो बिंदू पासून केले-  
ले लंबास उंची ह्मणावे.



४० जाविंदूमध्ये रेघेचा छेद होतो त्यास छेदन बिंदू ह्मणावे.



४१ रेघेचे छेदन बिंदू पासून तिचे दोन्ही कापर्यंत जा अंतरें त्यास तिचे-  
खंड ह्मणावे.

४२ जारे घेचे असे दोन खंड होतात कीं, सर्वरेषा एक खंड यांचा का-  
ची. दुस-या खंडाचे वर्गाबरोबर होतो, त्या रेघेचे छेदन मध्य प्रमाणा-  
त झालें असें ह्मणावे.

४३ वर्तुळाचे परिघाचा जो तुकडा त्यास कोंस ह्मणावे.

४४ अर्धवृत्त कोंसास परिघार्ध ह्मणावे.



४५ जीरेषा कोंसाची दोन टोके सांधिले तीस त्या कोंसाची ज्या  
ह्मणावे.



४६ एक वर्तुळाचा तुकडा आहे, जास मर्यादा एक कोंस व ए-  
क ज्या आहे, त्यास वर्तुळखंड ह्मणावे.



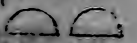
४७ कोंसामध्ये एक बिंदू घेऊन त्या पासून कोंसाचा दोन्ही  
स सांधणाऱ्या रेघेचा टोका पर्यंत दोन रेघा केल्या असतां-  
जो कोन होतो, त्यास वर्तुळखंडांतील कोन असें ह्मणावे. आणि को-  
सास मोर जो कोन असतो, त्यास कोंसावरील कोन ह्मणावे.



४८ वर्तुळाचा एक तुकडा आहे, ज्यास मर्यादा दोन व्यास  
द्वारे एक कोंस आहे, त्यास सेकनोर असें ह्मणावे.



४९ वर्तुळाचा जा खंडांत समान कोन असतात, त्यांस स-  
जातीय वर्तुळखंड असें ह्मणावे.



५० जाकौसा समोर समान मध्यकोन असतात त्यांस सजाति  
यकौंस असें ह्मणावें.

५१ जासेक तोरांतीठ कौंस सजातिय असतात त्यांस- ▽ ▽  
सजातिय सेक तोर ह्मणावें.

५२ जा बर्तुबाचा मिज्या समान असतात त्यांस समा  
न बर्तुळें ह्मणावें. ○ ○

५३ जीरेघ बर्तुबास मिळत्ये आणि वाढविली असतां त्या  
स कापीत नाहीं; त्या रेघेस बर्तुबाची स्पर्शरेघ ह्मणावें. ○

५४ जीं बर्तुळें परस्पर मिळतात; परंतु कापीत नाहींत, त्यां  
स स्पर्शबर्तुळें ह्मणावें. ○ ○

५५ बर्तुबाबाहेरचे एकाचिंदूपासून एकरेघ केली ती साव  
तुबास दोन स्थळां मिळत्ये, त्या रेघेस छेदनरेघ ह्मणावें. ○

५६ महत्त्व लक्षून दोन सरूप संख्यांचा जो परस्पर संबंध त्यास गु  
णोत्तर ह्मणावें अ. ब अथवा  $\frac{a}{b}$  असें लिहितात.

५७ गुणोत्तराचे मध्यम पदास अग्रसर आणि दुसरे पदा सउपा  
ग्रसर ह्मणावें.

५८ जा मोठे पदांत लहान पद कांही वेळ बराबर जातें, त्या मोठे प-  
दास लहान पदाचें व्यापक ह्मणावें आणि लहान पदास मोठे पदा  
चें व्याप्य ह्मणावें.

५९ जा व्यापकां नून पदें सारखे वेळ जातात त्या व्यापकांस त्या प-  
दांचीं समव्यापकें ह्मणावीं.

६० चार पदें आहेत त्यांत प्रथम आणि तिसरे यांची पाहिजेत  
तीं समव्यापकें घेऊनी, तसेंच दुसरे आणि चवथे यांची पाहिजेत-



तीसम व्यापक घेतली, आणि पहिले पदाचे व्यापक दुसरे पदा  
चे व्यापकापेक्षा मोठे, बराबर अथवा लहान असेल; तसें तिसरे  
पदाचे व्यापक चवथे पदाचे व्यापकापेक्षा अनुक्रमे मोठे, बराबर,  
अथ० लहान असेल तर तीं चार पदे प्रमाणांत आहेत.

६१ जर चार पदांत पहिलें आणि दुसरें यांचें गुणोत्तर, तिसरें-  
आणि चवथें यांचें गुणोत्तर बराबर असेल तर तीं चार पदे प्रमा-  
णांत होतील. आणि त्या प्रमाणास चतुः प्रमाण ह्मणावें.

६२ अ, ब, क, ड. चार पदे प्रमाणांत असल्यास अः बः कः ड  
या प्रमाणें लिहितात.

६३ सगळ्या रेघस जर मोठा खंड तर मोठ्या खंडास लहान खंड  
या प्रमाणें एकरेघेचे दोन खंड पाडिले असतां, त्या रेघेचे अंत्यम  
ध्य प्रमाणानें खंड पडले असें ह्मणावें.

६४ सगळ्या रेघेस जर एका टोंकाकडील खंड तर दुसरे टोंकाक  
डील खंडास मध्य खंड. या प्रमाणें एकरेघेचे तीन खंड पाडिले-  
असतां त्या रेघेचे गायन प्रमाणानें खंड पडले असें ह्मणावें.

६५ पहिल्या रेघेस जर तिसरी रेघ तर पहिली आणि दुसरी यांचा  
बजाबाकीस दुसरी आणि तिसरी यांची बजाबाकी. या प्रमाणें ती  
त्रेधा असल्या तर त्या गायन प्रमाणांत आहेत असें समजावें.

६६ यावरील प्रमाणांत तीन रेखांपैकी मध्य रेघेस गायन मध्य  
रेष ह्मणावें.

६७ एका बिंदूपासून चार रेखा निघून त्यांणीं एकरेघेस गायन  
प्रमाणानें छेदिलें असतां त्या रेखांस गायन प्रमाण छेद रेखा असें  
ह्मणावें.

६८ जा दोन आकृती मध्ये एका आकृतीचे कोन मध्येकी दुसऱ्या आकृतीचे कोनाबरोबर असतात, व समान कोनाजवळचा बाजू ममाणांत असतात; त्या आकृतींस सरूपाकृति ह्मणावे.

६९ एका आकृतीचा दोन बाजू पैकीं एका बाजूस, जर दुसऱ्या आकृतीचा दोन बाजू पैकीं एक; तर त्याच आकृतीचे दुसरे बाजूस, पदि ते आकृतीची दुसरी बाजू; असें असल्यास त्या दोन आकृतींचा ला बाजू अनिक मावे ममाणांत आहेत असें ह्मणावे.

७० कोणसेही आकृतीची परिमिता तीच होय. जी तिचे सर्व बाजूंची मिळून बेरीज आहे.

७१ निश्चित तेंच होय. जें कांहीं करणें अथवा केल्याचा ताळा दाखविणें ते निश्चित दोन प्रकारचे आहेत, हस आणि सिद्धांत.

७२ कृत्य तेंच होय. जें कांहीं करायास सांगितलें.

७३ सिद्धांत तोच होय. जो कांहीं केल्याचा ताळा.

७४ किंमत तेंच होय. जें कांहीं पूर्वी सांगितलें किंवा सिद्ध केले. पुढें येणार तें रुग्म जाया साठी.

७५ कुरलरी तीच होय. जो पूर्वील प्रत्यय आला अथवा सिद्धांतापासून जो प्राप्त झाला.

७६ स्कोलम ह्मणजे दीप पूर्वी सांगितले पुराकरणावर ह्मणजे त्या कृत्यावरील अचांतर विशेष.

### प्रत्यक्ष ममाणे.

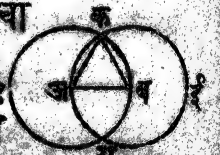
१ जा वस्तू दुसरे एके वस्तूशीं प्रत्येक सम ह्मणजे बरोबर आहेत तर त्या सर्व वस्तू परस्पर बरोबर आहेत.

२. समांत सम मिळविलेतर बेरीज सम होते.
३. समांतून सम वजा केले तर सम बाकी रहातात.
४. समांत विषम मिळविलेतर बेरीज विषम येते.
५. विषमांतून सम वजा केले तर विषम बाकी रहातात.
६. जावस्तू मध्येकीं दुसरे एके वस्तूचे दुप्पट आहेत, त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत.
७. जावस्तू मध्येकीं दुसरे एके वस्तूचे अर्धा बरोबर आहेत, त्या सर्व बराबर आहेत.
८. जावस्तू सर्वांशीं परस्पर मिळतात अथवा सारिखी जागा भरतात त्या एकरूप आहेत.
९. कोणती ही वस्तू तिचे सर्व लुकड्यांचे बेरजे बराबर आहे.
१०. सर्व काटकोन परस्पर बराबर असतात.
११. एकच बिंदूतून एकेच रेषेचीं दोन समांतर रेषा काढिल्या असता त्या परस्परांशीं मिळतील. ह्या जे एकेच ठिकाणीं पडतील नि राब्यार हाणार नाहीत.

## बूक पहिलें.

### मध्यम सिद्धांत. इ. स. १५००.

अबदि लेळे रेण्वर समवाजू त्रिकोण करावयाच्या  
 अब त्रिज्येनें आ आणि व वस्तु मध्य जाणून दो  
 न वस्तुं कर आणि त्यांचे क छेदन बिंदू पासून अ  
 क बक सांध आतां अक बक रेषा मध्येकीं अबचे बराबर आहेत.  
 कारण त्रिज्या आहेत: अबक हा समवाजू  $\Delta$  होय हे सिद्ध.



## दुसरा सिद्धांत

सांगितल्या बिंदूपासून सांगितल्या रेघे एवढी रेघ काढावयाची.

अबिंदूपासून अब एवढी रेघ काढावयाची.

अ, ब बिंदू सांध आणि (१ सि. प्र.) अबवर

अबड सम बाजू वि. कर. नंतर ब मध्य जाणून

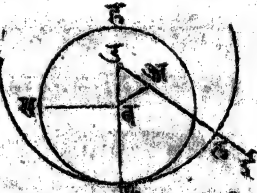
बस बिज्येने एक वर्तुळ कर आणि बड रेघ व

तुळासग स्थळीं मिळेल अशी वादीव. नंतर ड मध्य जाणून ग बिज्ये

ने एक वर्तुळ कर आणि अड रेघ परिधास ल स्थळीं मिळे पर्यंत वा-

दीव. (१० व्या. प्र.) डल = डग आहे. यांत (३ प्र. प्र.) अड = बड का

कडून बाकी अल = बग अ. बस :: अल = बस हे सिद्ध.



## तिसरा सिद्धांत

दिलेल्या दोन विषमरेखांचे कोन मोठी चालवानी एवढा तुकडा पा

डावयाचा.

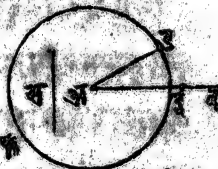
सरेघे एवढा अबरे घेवा तुकडा पाडावयाचा.

(२ सि. प्र.) अ बिंदूपासून स एवढी अड रेघ का

डून अ मध्य स्थळ कडून अड बिज्येने डई वर्तुळ कर. तेव्हा अई सां

गितला संड झाला. कारण अबिंदू मध्य आहे :: अई = अड अ. स

हे सिद्ध.



## चवथा सिद्धांत

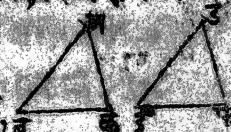
हट्टनचा पहिला.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतर कोन दुसऱ्याचा दोन बा

जू व अंतर कोन यांशीं अनुक्रमे बराबर असतील, तर ते दोन त्रिको

ण एकरूप होतील.

अबक आणि डई या दोन त्रिकोणांचा अब





अकया दोन बाजू व अंतर कोन दुसऱ्या बाजू ई, डफ या दोन बाजू व अंतर कोन यांशी अनुक्रमे वरावर असतील, तर हे दोन एक रूप होतील.

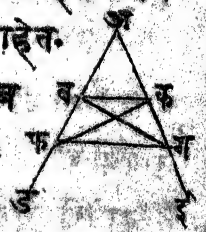
आतां अबक वि० डईफ त्रिकोणावर ठेविला असा की, अबिडू विंदूवर पडेल. अब, डईवर पडेल अक, डफवर पडेल, आणि अव = डई आहे. ∴ ब बिंदू ई बिंदूवर पडेल तसेंच अक = डफ आहे. ∴ क बिंदू फ बिंदूवर पडेल. ∴ अबक, डईवर पडेल, हे दोन त्रिकोण एक रूप आहेत हे सिद्ध.

### पांच वासिदांत.

ह० २

समद्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन वरावर आहेत व समबाजू त्रिकोणांत वरिल्या असतां बाहेरील कोन वरावर आहेत.

अबक  $\triangle$  न अक = अब असेल तर  $\angle क = \angle ब$  व बाजू होईल. आणि बाजू बाजू विल्या असतां  $\angle फ ब क = \angle ग क ब$  होईल.



अक, अब, ई आणि ड पर्यंत बाजू व आणि बफ तुकडा करतुन ज्या वरावर ये आणि बग, फक सांघ आतां अबग आणि अफक हे  $\triangle$  (१ सि० म०) एक रूप आहेत. ∴ कफ = बग,  $\angle अफक = \angle अबग$  आणि  $\angle अबग = \angle अकफ$  आहे. असा बकफ आणि कबग हे  $\triangle$  (२ सि० म०) एक रूप आहेत. ∴ ग ब क = फ क ब आणि  $\angle फ ब क = \angle ब क ग$  तेव्हा बाहेरील कोन वरावर हे सिद्ध.

पुनः  $\angle अबग = \angle अकफ$  यांतून  $\angle ग ब क = \angle फ क ब$  हे वजा करून,  $\angle अबक = \angle अकब$  आहे हे सिद्ध.

### सहा वासिदांत.

त्रिकोणांत दोन कोन बराबर असतील तर त्यांचा समांतर बाजू बराबर होतील.

अबक  $\Delta$  त  $\angle ब = \angle क$  असेल तर अब = अक होईल.



अब = अक नसेल तर अब > अक आहे, असे मा

नून (३ सि. प्र.) अब चा अक चे बराबरईवड तुकडा घे. कड सांघ व

डक आणि अबक  $\Delta$  त बड = अक, बक दोहीस साधारण  $\angle ब$

=  $\angle बक$  अतेह्यां (४ सि. प्र.) हे  $\Delta$  एकरूप. परंतु लहान वस्तू मोठे व

स्तू बराबर होणें परम अशक्य.  $\therefore$  अब = अक हें सिद्ध.

जर. समकोण  $\Delta$  समभुज असतात.

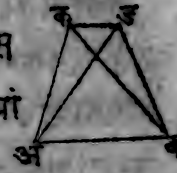
### सातवा सिद्धांत.

एके पायावर एके अंगास मत्येक दोकांपासून दोन दोन बराबर रेखांनीं दोन त्रिकोण होणार नाहीत.

अब रेचेचा अ आणि ब दोका पासून एका अंगास

अक = अड आणि बक = बड अचारे या केव्हा तर त्यां

पासून दोन त्रिकोण होणार नाहीत.



परंतु अबक आणि अबड हे दोन  $\Delta$  झाले असें मासून कड सांघ. तर अक = अड. (५ सि. प्र.)  $\angle अकड = \angle अडक$  सेंच बक =

बड.  $\therefore \angle बडक = \angle बकड$  यांत एकवेळ  $\angle क$  चा तुकडा  $\angle ड$  बरा

र आणि दुसऱ्यानें  $\angle ड$  चा तुकडा  $\angle क$  बराबर होतो हें अशक्य  $\therefore$

बराबर रेखांनीं एकाच अंगास दोन  $\Delta$  होत नाहीत हें सिद्ध.

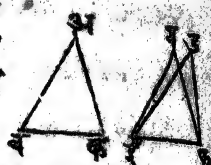
### आठवा सिद्धांत.

ह.प्र.

जर दोन त्रिकोणांत एकाचा तीन बाजू दुसऱ्याचा तीन बाजू बराबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप होतील.



अबक आणि डईफ या दोन  $\triangle$  त अब = डई,  
अक = डफ आणि बक = ईफ असतील तर हे दो  
न  $\triangle$  एकरूप होतील.



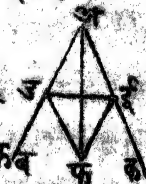
आतां अबक त्रि० डईफ त्रि० वर ठेविला असा कीं बक बाजू ईफ  
बाजूवर पडेल ब बिंदू ई बिंदूचीं आणि क बिंदू फ बिंदूचीं मिळेल. बक  
बाजू ईफ बाजूवर पडली. अब, अक या अनुक्रमें डई, डफवर  
पडतील. परंतु पडत नसल्यास आंत किंवा बाहेर पडतील. पण अ  
द्या पडोन (७ सि० प्र०)  $\triangle$  होणार नाहीत,  $\therefore$  त्यावरच पडतील. हे  
दोन  $\triangle$  एकरूप हें सिद्ध.

### नववा सिद्धांत.

ह० क० २

दिलेला अ कोन दुभागावयाचा.

अबरे घेत ड बिंदू घेऊन (३ सि० प्र०) अकचा अड = ड  
अई संडकर-डई सांध. त्याच रेखेवर (१ सि० डईफ ब क  
समबाजू  $\triangle$  कर अफ सांध. तेव्हां अफ ड आणि अफ ई हे दोन (१ सि०  
प्र०) एकरूप आहेत.  $\therefore$  अफ अड = अफ अई हें सिद्ध.



### दहावा सिद्धांत.

ह० क० ३

दिलेल्या अबसरळ रेखेचे दोन समान भाग करावयाचे.

अब रेखेवर (१ सि० प्र०) अबक समबाजू त्रि० करून  
(१ सि० प्र०) क कोन दुभागून ती रेखा अब स मिळे पर्यंत  
तवा दीव. तेव्हां अडक आणि बडक हे दोन (१ सि०  
प्र०) एकरूप.  $\therefore$  अड = बड हें सिद्ध.



### अकरावा सिद्धांत.

ह० क० ४

दिलेल्या सरळ रेखेवर त्यातील एके बिंदू पासून लंब करावयाचा.

अबरेघेंत कबिंदू आहे, त्या ठिकाणी लंब  
करावयाचा.

अबरेघेंत कोणताही डबिंदू घे आणि कड अ ड क इ व  
= कडचे नंतर डईवर (१० सि. प्र.) डफई समबाजू  $\triangle$  करून क  
फसांध. आतां डफक आणि डफक हे दोन  $\triangle$  (८ सि. प्र. एक रूपाः फ  
स्थळावरील कोन परस्पर बराबर तेव्हां (१० व्या. प्र.) फफरे घलंब  
आहे हें सिद्ध.



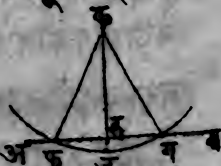
### बारावासिद्धांत.

ह. क. ४

एकरेघ व तिचाबर एक बिंदू दिला आहे. त्या बिंदू पासून दिहे  
रेघेवर लंब करावयाचा.

अबरेघेवर कबिंदू पासून लंब करावयाचा.

अबरेघेचे दुसरे अंगास डबिंदू घेऊन कडवि अ ड उ व ब  
ज्येने कमध्य जाणून फगकोंस कर फक आणि कगसांध. फग  
रेघ (१० सि. प्र.) हस्थळीं दुभागून हकसांध. आतां (८ सि. प्र.) फ  
हक आणि कहग हे  $\triangle$  एक रूपाः  $\therefore$  कहफ  $\angle$  कहग आहे.  $\therefore$  (१०  
व्या. प्र.) कहरे घलंब आहे हें सिद्ध.



### तेरावासिद्धांत.

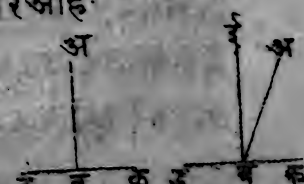
ह. क. ५

एका सरळ रेघेवर दुसरी सरळ रेघ मिळून त्या स्थळीं दोन को  
न होतात, त्यांची बेरीज दोन काटकोना बराबर आहे.

अबरेघ कडरेघेवर मिळून  $\angle$  अबड आ  
णि  $\angle$  अबक हे दोन कोन होतात ते बराबर

असल्यास (१० व्या. प्र.) प्रत्येक काटकोन आहे.

परंतु हे जर बराबर नाहीत तर डब, कड रेघेवर लंब केला तेव्हा





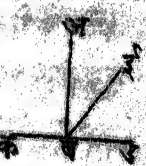
(१० व्या. प्र०) < ईबक = < ईबड आणि ते प्रत्येक का० आहेत. (११ प्र०)  
 म०) < ईबक = < ईबअ + < अबक. < ईबड + < ईबअ + < अबक  
 = २ का० यांत < ईबअ - < ईबअ = ० मिळवून (< ईबड + < ईबअ)  
 + (< ईबअ + < अबक - < ईबअ) = २ का० तेव्हां < अबक + < अबड  
 = २ का० कोन हें सिद्ध.

कु० पूरक कोनाचे दोन जोडामध्ये एक कोन बराबर असेल तर बाकी राहिलेले कोनही बराबर होतील.

### चवदावा सिद्धांत. ह० ६ कु० १

एका सरळ रेषेस तिच्या एका बिंदूत दोहोंकडून दोन सरळ रेषा मिळून जे दोन कोन होतात त्यांची बेरीज दोन काट कोना बरोबर असेल तर, त्या दोन सरळ रेषा मिळून सरळ रेषा होईल.

कब आणि बडया दोन रेषा अन्वरे घेतील ब बिंदू स्थळीं एकत्र मिळून त्या पासून अबक आणि अ क बड हे दोन कोन होतात, ते दोन का० बराबर असतील तर कब आणि बड मिळून कबड सरळ रेषा होईल.



आतां कब रेषा सरळ रेषेत आहे, त्या रेषेत बडन सेलतर बड रेषा त्या सरळ रेषेत आहे असे मान. तेव्हां (११ सि० प्र०) < अबक + < अबड = २ का० परंतु पर सांगितल्याप्रमाणे < अबक + < अबड = २ का० आहेत. या पासून < अबड = < अबड इत्यादी तेव्हा तुकडा सर्व सरळ बराबर होणे अशक्य. कब, बड मिळून कबड सरळ रेषा होतं हें सिद्ध.

### पंधरावा सिद्धांत. ह० ७

दोन रेषा परस्परांस छेदितात तेव्हां समोरासमोरचे कोन बराबर

र होतात.

अब आणिकड्यारेषाई स्थळीं परस्पर केदितात, क

तर  $\angle अईक = \angle बईड$  होईल.

अब वर कई रेष मिळून (१३ सि.प्र.)  $\angle अईक + \angle कईब = १८०$   
तसेंच कडरे घेवर कई रेष मिळून  $\angle बईक + \angle बईड = १८०$  सा  
धारण  $\angle बईक$  दोन ही पेट्यां तून काढून टाकिला असता (३२  
प्र.)  $\angle अईक = \angle बईड$  आहे हें सिद्ध.

### सोळावा सिद्धांत. ह०

त्रिकोणाची एक बाजू बाहेर वाढविली असता बाहेरील कोन त्या  
चे आंतिलाचे समोरचे कोणते ही कोनाहून मोठा होतो.

अब  $\triangle$  ची बाजू बाजू पर्यंत वाढविली असता  
बाहेरील  $\angle अकड$   $\angle अ$  होईल.

अक रेषाई स्थळीं दुभागून बई रेष करून वाढ व  
विली, अशी कीं, ईफ = बई होईल. कफ सांधते बाब अई, कईफ हे  
दोन  $\triangle$  (४ सि.प्र.) एकरूपः  $\angle अ = \angle ईकफ$  परंतु  $\angle अकड$   $\angle ईकफ$   
आहे  $\therefore$  त्याचे बराबरीचे  $\angle अ$  हून ही मोठा आहे हें सिद्ध.

या प्रमाणेच अक रेष वाढवून बक दुभागिली असता  $\angle बकड$  अथ  
 $\angle अकड$   $\angle ब$  होईल.

### सत्रावा सिद्धांत.

त्रिकोणाचा कोन त्या ही दोन कोनांची बेरीज दोन काढून कमी असते.

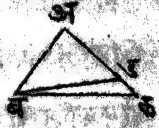
अब  $\triangle$  त कोन त्या ही दोन कोनांची बेरीज दो  
न का. पेक्षा कमी आहे.

बक बाजू पर्यंत वाढव. आतां (१५ सि.प्र.)  $\angle अकड$   $\angle ब$  अ.  $\angle अ$

आहे. या दोहोंत <अकब प्यायानें मिथीव तेदां (<अकब + <अक  
ड)> (<अकब + <ब) आहे. परंतु (१३ सि. प्र.) <अकब + <अकड =  
२का. ∴ <ब + <अकब दोनका हुन उणें. या प्रमाणें <ब + <अ. अ.  
<अ + <क हे दोनकाट कोना हुन कमी हें सिद्ध.  
कुर. एका बिंदू पासून एका रेषेवर दोन लंब होणार नाहीत.

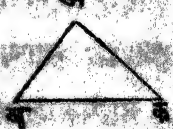
### अठरावासिद्धान्त. ह. १९

त्रिकोणांत मोठे बाजू समोरील कोन लहान बाजू समोरील को  
ना पेक्षा मोठा असतो.

अबक  $\Delta$  त अक > अब असेल, तर <ब < क होईल.   
अक > अब आहे ∴ अब = अड करून बड सांभ. व  
आतां (१६ सि. प्र.) <अडब < क आहे अड = अब आहे ∴ (१५ सि.  
प्र.) <अडब = <अबड तेदां <अबड < क आहे ∴ <ब चातु  
कडा > क आहे तेदां सर्व <ब < क आहे हें सिद्ध.

### एकुणिसावासिद्धान्त. ह. २०

त्रिकोणांत मोठी बाजू मोठे कोना समोर असते.

अबक  $\Delta$  त <ब < क आहे तर अक > अब होईल.   
अक > अब नसेल तर बराबर किंवा लहान अब  
सेल. परंतु बराबर असल्यास (५ सि. प्र.) <ब = <क असावा तो  
नाहीं ∴ बराबर नाही. आणि अक < अब असेल तर (१० सि. प्र.)  
<क < ब असावा तो नाही ∴ अक > अब आहे हें सिद्ध.

### विसावासिद्धान्त. ह. २१

त्रिकोणाचा कोण त्याही दोन बाजूंची बेरीज तिच्या बाजू हुन मोठी  
आहे.

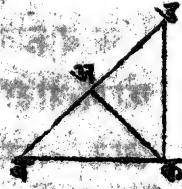


अबक  $\triangle$  त अब + अक > बक होईल.

बअ, उ पर्यंत वादीव आणि अक = अड करून,

उक सांघ अड = अक आहे. (१५ सि. प्र.) < अक उ >

= < उ परंतु < बक उ > < अक उ आहे. < उ पेक्षा ही मोठा आहे. आतां  
बडक  $\triangle$  त (१० सि. प्र.) < बक उ > < बडक > बड बाजू > बक बाजू आ  
हे. पण बड = अब + अक. अब + अक > बक हे सिद्ध.



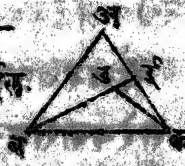
### एक विसावा सिद्धांत.

त्रिकोणांत एक बिंदू घेऊन तो व कोणत्याही दोन बाजू यांची दोकेंसां  
घिती असतां जा रेघा होतात त्यांची बेरीज त्या त्रिकोणाचा दुसऱ्या  
दोन बाजूंचा बेरीज पेक्षा उणी होते. आणि त्या रेघां मधील कोन त्रि  
कोणाचे घेतल्या दोन बाजूंचे मधील कोनाहून मोठा होतो.

अबक  $\triangle$  त ड बिंदू घेऊन, त्या पासून बड, कड -

रेघा के त्या असतां अब + अक > बड + कड होईल.

आणि < बडक > < अ होईल.



बड बाजू पर्यंत वादीव. (१० सि. प्र.) अब + अड > बड + ड  
ई आहे आणि डई + कई > कड आहे. बेरीज घेऊन, अब + अड  
+ डई + कई > बड + कड + डई साधारण डई वजा करून, अब  
+ अक > बड + कड आहे हे सिद्ध.

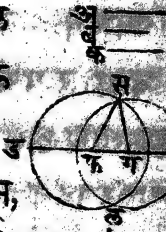
(१५ सि. प्र.) < बडक > < अ आहे, आणि < बडक > < बडक आ  
हे. < ड > < अ आहे हे सिद्ध.

### वे विसावा सिद्धांत.

तीन बाजू पासून त्रिकोण करावयाचा परंतु कोणत्याही दोन  
बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूहून जास्त असावी.



अब, कतिन रेखा दिल्या आहेत अशा कीं त्यांतील कोणत्याही दोहोंची बेरीज तिसरी पेक्षा अधिक आहे, त्या पासून  $\Delta$  करावयाचा.



आतां डई एक रेखाकडून तिचे ड शोबटा पासून, अब, क रेखांबराबर अनुक्रमे  $उक, फह$ , आणि ग ह खंड क नंतर फ मध्य करून, फ ड भिज्येने एक  $\circ$  कर, तसेंच ग मध्य कून ग ह भिज्येने एक  $\circ$  कर आतां हीं दोन वर्तुळें स स्थळीं परस्पर छेदितात. तेथून स फ, स ग रेखा कर, तेव्हां स ग फ हा डळिअ झाला. आता तीन बाजू अब, क रेखांबराबर आहेत, कारण ज्या स फ = ड फ = अव सेंच ग स = ग ह = क आणि ग फ = व अब, क या तीन रेखां पासून ग स फ  $\Delta$  झाला हें सिद्ध.

### तेविसावा सिद्धांत.

व. क. ०५

दिलेले घेत दिले बिंदू जवळ सांगितले कोनाबराबर कोन करीत रेखा करावयाची:

अवरे घेतले बिंदू जवळ  $<क$  एवढा कोन करावयाचा.

आतां क ई आणि क ड रेखांत ड आणि ई बिंदू घेऊ

म ते सांध (१२ सि. ५०) क ड ई  $\Delta$  चा तीनही बाजू बरा

बर जाणा बाजू होतील, असा दिलेले घेव्हां अ फ ग  $\Delta$  कर तेव्हा

होत  $\Delta$  (१२ सि. ५०) एकरूप ::  $<क = <अ$  हें सिद्ध.

### चविसावा सिद्धांत.

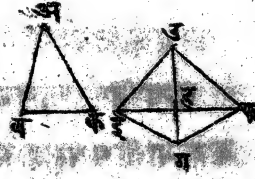
दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचे दोन बाजू बराबर

सून, एकाचा अंतर कोन दुसऱ्याचे अंतर कोना पेक्षा मोठा असेल

तर मोठ्या कोना समोरील बाजू लहान कोना समोरील बाजू पेक्षा

मोठी होईल.

अबक आणि ड ईफ या दोन  $\Delta$  त एकाचा



अब, अब या दोन बाजू दुसऱ्याचे डई, डफ चे

बराबर असून  $\angle$  अ असेल, तर ईफ बाजू बक बाजू होईल.

$\angle$  अ  $= \angle$  डईग होईल अशी अब  $=$  डग रेघ करून इग, गफ

सांधे अबक आणि ड ईग हे दोन  $\Delta$  (११ सि.प्र.) एकरूप : बक  $=$  ईग

अब  $=$  डग परंतु अब  $=$  डफ : (११ प्र.प्र.) डग  $=$  डफ : डगफ  $\Delta$  त

(११ सि.प्र.)  $\angle$  डगफ  $= \angle$  डफग परंतु  $\angle$  गफड  $\angle$  ईफग आहे :

$\angle$  गफड चे बराबरीचा जो,  $\angle$  ईगफ चा तुकडा  $\angle$  डगफ तोही  $\angle$  ई

फगपेक्षां मोठा आहे.

तेजां  $\angle$  ईगफ  $\angle$  ईफगपेक्षां फारच मोठा आहे : (११ सि.प्र.)

फई ईग आहे ईग  $=$  बक आहे : (११ प्र.प्र.) फई बक आहे हे सिद्ध

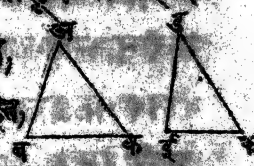
पंचविसावा सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजू बराबर असू

न एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याचे तिसरे बाजू हून मोठा असेल, तर

र तिचे समोरचा कोन लहान बाजू समोरचे कोनाहून मोठा होईल.

अबक आणि ड ईफ या दोन  $\Delta$  त एकाचा अब,



अब बाजू दुसऱ्याचा डई, डफ बाजू बराबर आहेत,

आणि बक  $>$  ईफ आहे, तर  $\angle$  अ  $>$  ड होईल.

आतां  $\angle$  अ  $<$  ड नसल्यास बराबर किंवा लहान असेल. परंतु

$\angle$  अ  $= \angle$  ड असल्यास (११ सि.प्र.) बक  $=$  ईफ होईल. पण ती बराबर

नाही तसे  $\angle$  ड  $<$  अ असेल तर (११ सि.प्र.) ईफ  $>$  बक होईल परंतु

बक, ईफ चे बराबर किंवा लहान नाही :  $\angle$  अ  $<$  ड आहे हे सिद्ध

## सविसावांसिद्धान्त

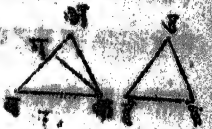
ह. ११

एका विकोणाचे दोन कोन व एक बाजू दुसऱ्या विकोणाचे दोन कोन व सजातीय बाजू यांशी बराबर असतील, तर ते दोन विकोण एकरूप होतील.

अबक आणि डईफ या  $\Delta$  मध्ये  $\angle ब = \angle ई$  आणि

$\angle फ = \angle क$ ,  $\therefore$   $\Delta$  क = ईफ असेल, तर हे दोन  $\Delta$

एकरूप होतील. सणजे अब = डई, अक = डफ आणि  $\angle अ = \angle हो$  ईल.



आतां अब = डई नसेल तर बग = डईक लून गक सांघ तेदां

बका आणि डईफ हे दोन  $\Delta$  (११ सि. प्र.) एकरूप  $\therefore \angle बक =$

$\angle फ$  आणि (वस्तुतांमि. प्र.)  $\angle अक = \angle फ$  आहे. (१२ प्र.)  $\angle बक =$

$\angle अक$  परंतु तुकडा सर्व वस्तू बराबर होणे परम अशक्य.

अब = डई निश्चय आहे. (१४ सि. प्र.) अबक आणि डईफ हे दोन

$\Delta$  एकरूप हें सिद्ध.

## सत्ताविसावांसिद्धान्त

ह. १२

एक सरळ रेषे दोन रेषांस छेदून, दोन सुलभ कोन बराबर

करीत असल्यास त्या दोन रेषा समांतर होतील.

अब, कडपा दोन रेषांस ईफ रेषे छेदून, अईफ

आणि ईफड हे सुलभ कोन बराबर करिते, तर

अबशी कडपा समांतर होईल.



अब, कडपा नसल्यास कोवें बरी ग स्थिति मिळतील तेदां गई

फ  $\Delta$  आला यांत (१५ सि. प्र.)  $\angle अईफ = \angle ईफड$  आहे, परंतु (मिति

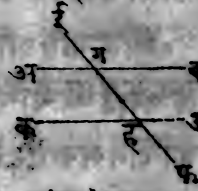
प्र.) ते बरेबर आतां एक वेळ मोठा आणि एक वेळ लहान हें होणे प



रम अशक्य, ∴ अब, कड या समांतर आहेत, हे सिद्ध

### अठ्ठाविसावासिद्वांत ह० ११ क० १, २

एक रेघ दोन रेघांस छेदून बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समो रचे त्याच बाजूचे कोना बराबर करील, किंवा त्याच बाजूचे आंतिल दोन कोन मिळून दोन काट कोना बराबर करील, तर त्या दोन रेखास गांतर होतील.



अब आणि कड यांस ईक रेघ छेदून, <ईगब आणि <गहड हे बराबर करील, किंवा <बगह

+ <गहड = २ का० करील, तर अब, कड समांतर होतील.

आतां <ईगब = <गहड (परसा० प्र०) आहे आणि (११ सि० प्र०) <ईगब = <अगह आहे ∴ (११ प्र०) <अगह = <गहड आहे ∴ (१२ सि० प्र०) अब आणि कड या समांतर आहेत, हे सिद्ध

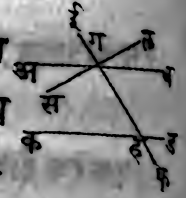
<बगह + <गहड = २ का० आहेत आणि (११ सि० प्र०) <बगह = <ईगअ (१३ सि० प्र०) <ईगअ + <अगह = २ का० हे समीकरण प्रथम समीकरण याची पदे मोजून <ईगअ अथ० <बगह + <अगह = <बगह + <गहड आहेत यांत साधारण <बगह आहे तो वजा करून, (१३ प्र० प्र०) <अगह = <गहड आहे ∴ (१२ सि० प्र०) अब, कड समांतर आहेत, हे सिद्ध

### एकुणतिसावासिद्वांत ह० १२, १४

अर एक सरळ रेघ दुसऱ्या दोन समांतर रेघांस छेदिले, तर व्युत्क्रमक कोन बराबर होतात. आणि बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरेचे त्याच बाजूचे कोना बराबर आणि त्याच बाजूचे आंतिल दोन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर होते.



अब आणिकड या दोन समांतर रेखांस ई फरेष  
ह आणि गस्थकीं छे दित्ये, तर  $\angle$ अगह  $\angle$ गहड,  $\angle$ ईगब  
 $= \angle$ गहड आणि  $\angle$ बगह  $+ \angle$ गहड  $= २$ का० होतील.



अगहकोन, गहड कोनाचे बराबर नाही असें मानिल्यास गहड  
कोनाबराबर कोन करणारी गविडूंतून सल रेघ कर: तेव्हां (१० सि.  
प्र०) सल कड शी स० आहे; परंतु अब कड शी स० आहे असें घेत  
लें आहे; तेव्हां एकाच बिंदूंतून एके रेघेचीं परस्पर नजमणाऱ्या अ  
शा दोन समांतर रेखा करणें अशक्य  $\therefore \angle$ अगह  $= \angle$ गहड हें सिद्ध

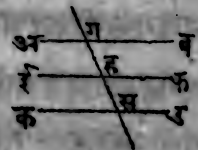
पुनः (१५ सि० प्र०)  $\angle$ अगह  $= \angle$ ईगब आहे; परंतु (वर सांग० प्र०)  
 $\angle$ अगह  $= \angle$ गहड  $\therefore$  (१ प्र० प्र०)  $\angle$ ईगब  $= \angle$ गहड हें सिद्ध  
पुनः  $\angle$ ईगब  $+ \angle$ बगह  $= २$ का० परंतु  $\angle$ ईगब  $= \angle$ गहड आहे  $\therefore$   
 $\angle$ बगह  $+ \angle$ गहड  $= २$ का० हें सिद्ध

### तिसा वा सिद्धांत.

ह० १३

जा कित्येक रेखा दुसरे एके रेघेचीं समां असतात त्या सर्व परस्पर  
समांतर असतात.

अब आणिकडसरकरेखा ई फ रेघेचीं समां  
असतील तर अब, कड समां होतील.



या तीनही रेखांस छेदणारी गसरेंषा कर. (१९ सि० प्र०)  $\angle$ अ  
गह  $= \angle$ गहफ आणि  $\angle$ गहफ  $= \angle$ हसड  $\therefore$  (१ प्र० प्र०) अगह, ग  
हड हे सुल्लमकोन परस्पर बराबर आहेत: (२० सि० प्र०) अ  
ब, कड रेखा समांतर आहेत हें सिद्ध.

### एक तिसा वा सिद्धांत

ह० क० ६

दिलेल्या बिंदूंतून दिलेल्या रेघेचीं समांतर रेघा कर.

अबिंदूतूनबकशीं समांतररेषकर.



यकरेघेंतील कोणताही एक डबिंदू आणि अबिंदू

अथ. अडकोनाबराबर युक्तम कोन करणारी अबिंदूतून ईफरेष

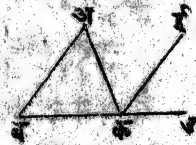
रतेहां (२७ सि.प्र.) ती बकशीं अबिंदूतून समांतर झाली हे सिद्ध.

ह. १६/१७

**बनिसावासिद्धान्त.**

त्रिकोणाची कोणतीही एक बाजू बाहेर वाढविली, तर बाहेरील कोन त्याचे आंतील समोरचे दोन कोनांचे बेरजेबराबर होईल. आणि त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर होईल.

अबक. ची बकबाजू ड पर्यंत वाढविली, तर बाहेरील  $\angle$  अकड  $= \angle$  अ +  $\angle$  ब होईल.



अबशीं अबिंदूतून क ईसरेषकर. (११ सि.प्र.)

$\angle$  अ  $= \angle$  अकई आणि  $\angle$  ब  $= \angle$  ईकड  $\therefore \angle$  अ +  $\angle$  ब  $= \angle$  अकड हे सिद्ध.

आतां  $\angle$  अ +  $\angle$  ब  $= \angle$  अकड यांत  $\angle$  अकब मिळविला असतां  $\angle$  अ +  $\angle$  ब +  $\angle$  क  $= \angle$  अकड +  $\angle$  अकब परंतु याचोबरीचे दोन कोनांची बेरीज (११ सि.प्र.) २ काट. बराबर आहे,  $\therefore \Delta$  चे आंतील  $\angle$  अ +  $\angle$  ब +  $\angle$  क  $= २$  काटकोन हे सिद्ध.

१ कु. सरळरेषाकृतीचे आंतील सर्व कोन व चार का. मिळून त्या आकृतीचे बाजूसंख्येचे दुप्पट का. नां बराबर होतात. } ह. ११

२ कु. कोणत्याही सरळरेषाकृतीचा बाहेरील सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोनांबराबर असते. } ह. १२

३ कु. एका बि. चा दोन कोनांची बेरीज, दुसऱ्या बि. चा दोन कोनांची बेरीज बराबर असते, तर तिसरे ही कोन बराबर होतील. (कु. १)

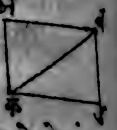
४ कु. का. ४ चा बाकी दोन कोनांची बेरीज एका बरा असते. ह. १३ कु. २

## तेतिसावासिद्धान्त.

ह०२४

समांतर आणि बराबर रेषांचीं समोरी समोरीचीं शेवटे सांधणा  
यारे रेषा परस्पर समांतर आणि बराबर होतील.

अब आणि कड या समांतर बराबर रेषांचीं शेवटे  
सांधणाऱ्या अक व ड रेषा याही समांतर होतील.



बक सांध आतां अब, कड या समांतर रेषां सकरेष छेदिते ते  
(२९ सि० प्र०)  $\angle अबक = \angle बकड$  आहे. अबक आणि बकड हे दोन  
न  $\Delta$  (११ सि० प्र०) एकरूप  $\therefore अक = वड$  आणि  $\angle बकड = \angle कडव$   
ड आतां  $\angle बकअ = \angle कडड$  आहे  $\therefore$  (२० सि० प्र०) अक आणि वड  
ड या रेषा समांतर आहेत हे सिद्ध.

## चवतिसावासिद्धान्त.

ह०२२

समांतर बाजूंची कोनांत समोरी समोरीचा बाजू व कोन बराप  
र असतात, वकर्ण रेषाची कोनाचे दोन समान भाग करते.

अबडकस चौकट बककर्ण रेषा आहे. तर  
अब = कड, अक = वड आणि  $\Delta अबक =$   
 $\Delta बकड$  होईल.



अब, कड आणि अक, वड रेषा समांतर आहेत आणि बक रेषा यां  
समिक्ते  $\therefore$  (२९ सि० प्र०)  $\angle अबक = \angle बकड$  आहे,  $\angle अकव =$   
 $\angle डबक$  आहे. अबक आणि बकड या दोन  $\Delta$  त बक बाजू दोहों  
स साधारण आहे व एकाच दोन कोन दुसऱ्याचे दोन कोना बराप  
र आहेत  $\therefore$  हे दोन  $\Delta$  (२६ सि० प्र०) एकरूप आहेत  $\therefore अब = कड,$   
 $अक = वड, \angle अ = \angle ड$  आणि  $\angle अबक = \angle बकड$ , आतां  
 $कव = \angle डबक$  आहे  $\therefore$  (२० प्र०) सर्व  $\angle अकड = सर्व \angle अबड$  हे सिद्ध.

१कु. समां. रेखांतील लंबांतर सारखें असतें.

२कु. बरचा कुरलरी वरून सिद्ध होतें कीं, समां. रेखांचा जोडांत-  
जे वि. व चौ. असतात ते सारख्या उंचीचे असतात, व जांची उंची  
बराबर असते, व पाये एकाच रेषेत व एकाच अंगास असतात,  
ते समांतर रेखांचे जोडांत असतात.

### पस्ति सावा सिद्धांत.

ह. २५

एकाच पायावर व समां. रेखांचे एकाच जोडामध्ये जे स. चौ. अ-  
सतात, ते क्षेत्रफळानें बराबर असतात.

अबकड आणि ईबकफ हे दोन स. चौ. वक  
पायावर आणि अफ, वक या दोन समां. रेखां-



चे जोडांत आहेत, तर हे क्षेत्रफळानें बराबर होतील.

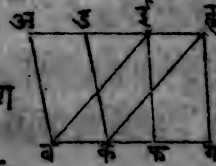
अबकड आणि ईबकफ स. चौ. आहेत :: वक = अड आणि  
वक = ईफ आहे :: (१ प्र. प्र.) अड = ईफ यांत साधारण ड ई मिळ-  
विली, ते ह्यां अई = डफ झाली, व अब = डक आहे :: अईवΔ चा  
अई, अब बाजू, डकफΔ चा डफ, कड बाजू बराबर. (२९ सि. प्र.)  
∠ फडक = ∠ ईअब आहे :: (११ सि. प्र.) हे दोन Δ एकरूप आतां  
अबकफ यात्राफिज्यायदांतून हे दोन सम Δ पर्यायानें काढिले अ-  
सतां अबकड स. चौ. = ईबकफ स. चौ. आहे हें सिद्ध.

### छत्ति सावा सिद्धांत.

ह. २५ कु.

समान पायांवर व समांतर रेखांचे एकाच जोडांत जे स. चौ. अ-  
सतात, ते परस्पर बराबर असतात.

अबकड आणि ईफगह हे स. चौ. वक, फग  
या सारख्या पायांवर असून अह, बग या स.






रेषांचे जोडांत आहेत, ते परस्पर बराबर होतील. बई, कह सांध.

आतां बक = फग आहे आणि (३४सि.प्र.) फग = ईह :: (१प्र.)  
 प्र.) बक = ईह आहे बक, ईह या स. व बराबर आहेत. त्यांची  
 शेवटे सांधणाऱ्या जा बई, कह त्या (३३सि.प्र.) स. व बरा. आ  
 हेत. याजवरून बक हईसि. चौ आहे. (३५सि.प्र.) ईबक ह स चौ  
 = अबकडस. चौ. आहे तसेच ईबक ह स. चौ. = ईफग ह स. चौ.  
 :: (१प्र.प्र.) अबकडस. चौ. = ईफग ह स. चौ. आहे हे सिद्ध

### सततिसावासिद्धांत.

ह. २५

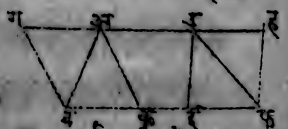
एकाच पायावर वसमां. रेषांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण आहेत  
 त, ते परस्पर बराबर आहेत.

बक पायावर व बक, ईफ या स. रेषांचे जोडांत 
 अबक आणि बकड हे त्रि. आहेत ते परस्पर बराबर आहेत.

अड रेष दोहों बाजूस ई आणि फ स्थळा पर्यंत वांटून बविंदूतून  
 नअकशी बई आणि क बिंदूतून बड शी कफस. कर. तेव्हा (३५सि.  
 प्र.) ईबकअ, डबकफ हे स. चौ. परस्पर बराबर आहेत. (३४सि.प्र.)  
 अबक, बडक हे दोन  $\Delta$  वरसांगि. स. चौ. चे अर्धे आहेत. :: (१प्र.)  
 प्र.) अबक आणि बडक हे त्रि. बराबर आहेत हे सिद्ध.

### अडतिसावासिद्धांत. ह. २५ कु. १

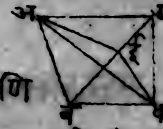
समान पायावर व स. रेषांचे एकाच जोडा मध्ये जे त्रि. आहेत,  
 ते बराबर आहेत.

बक, ईफ या समान पायावर आणि बक, 
 अड या स. रेषांचे एकाच जोडांत अबक आणि डईफ हे दोन  $\Delta$   
 आहेत, तर ते परस्पर बराबर आहेत.

आतां अडवाचू दोनही आंगांस वाटवून बविंदूतून अकशीं बग-  
आणि फविंदूतून डईशीं फहस कर. तेव्हां (३६ सि.प्र.) गबक अ-  
स.चौ. = डईफहस.चौ. आहे. आणि (३४ सि.प्र.) अबक वि. गक  
स.चौ. चे अर्धा आहे. तसेंच डईफ वि. डफ स.चौ. चे अर्धा आहे  
∴ (७ प्र.प्र.) अबक आणि डईफ हे वि. बराबर आहेत, हे सिद्ध.

### एकूण चाकिसावासिद्धांत.

एका पायावर व त्याचा एका आंगांस जे समान त्रिकोण असतात  
ते समांतर रेखांचे एकाच जोडांत असतात.



बक पायावर व त्याचे एकाच आंगांस अबक आणि  
डबक हे दोन समान वि. आहेत, तर ते स.रेखांचे एकाच जोडांत आहेत.  
अड सांधः अड बकशीं स. आहे, जर नसेल तर अविंदूतून ब-  
कशीं अईस. करून ईक सांधः (३७ सि.प्र.) अबक वि. = बईक वि.  
आणि (प्रति.प्र.) अबक वि. = बकड वि. आहे. (१ प्र.प्र.) बक  
ड वि. = बकई वि. आहे, परंतु बकई वि., बडक वि. चा तुकडा  
आहे, तेव्हां हे दोणे अशक्य ∴ अड वाचून बकशीं दुसरी स.रेखणा  
ही, हे सिद्ध.

कु. हा सिद्धांत स.चौ. वर ही लागू आहे.

### चाकिसावासिद्धांत.

जे समान त्रिकोण एका रेषेत असणाऱ्या अशा समान पायांवर व  
व त्यांचे एकाच आंगांस असतात, ते स.रेखांचे एकाच जोडांत असतात.

बफ रेघेतील बक आणि ईफ या समान पायांवर  
व त्यांचे एकाच आंगांस अबक, डईफ हे दोन वि. स-  
मान आहेत, तर ते स.रेखांचे एकाच जोडांत होतील.



अडविंदू सांध तर अड, बफशीस आहे, जर नसले तर अवि  
 इंतून बफ शी अगस. करून फग सांध. (३= सि. प्र.) अबकवि =  
 गईफ वि. आहे; परंतु अबकवि = डईफ वि. घेतला आहे. (१ प्र.  
 म) गईफ वि. = डईफ वि. आहे. तेव्हा हें होणें अशक्य: अविंदू  
 नसडवांचून बक शी दुसरी समां. रेघ व्हावयाची नाही. अडच-  
 समांतर आहे हें सिद्ध.

कु. हा सिद्धांत स. चौ. वर लागू आहे.

### अ सिद्धांत.

स. रे घांचे एकाच जोडांस जे समान वि. असतात, ते समान पायांवर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन समान वि. अई, फक  
 यास. रेघांचे एकाच जोडांत आहेत, तेव्हां अब  
 पाया = डई पाया होईल.



अब = डई पाया नसल्यास डई पाया ग पर्यंत वाढवून, अब = उ  
 ग करुन फग सांध. तेव्हां (३= सि. प्र.) अबक = उगफ परंतु (प्र  
 तिज्ञे म) अबक = डईफ तेव्हां (१ प्र. म) उगफ = डईफ  
 परंतु हें होणें परम अशक्य; कारण कोणतीही वस्तु तिचे तुकड्या  
 बराबर होणार नाही; अबक = डईफ आहे हें सिद्ध.

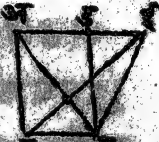
कु. हा सिद्धांत स. चौ. वरही लागू आहे.

### एकेचा क्विसावा सिद्धांत.

ह. २६

एक स. चौ. आणि एक वि. एकाच पायावर व समां. रेघांचे ए  
 काच जोडांत असतील; तर तो स. चौ. त्या एका दुषट आणि तो  
 स. चौ. चे अर्धा आहे.

बकपायावर आणि बक, अईस. रेघांचे जोडांत  
अबकडस. चौ. आणि बकईवि. आहेत तर  $\square$  अब  
कड = २५ बकई अथवा  $\triangle$  बकई = ३  $\square$  अबकड होईल. व

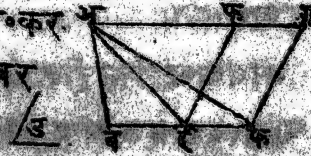


अक बिंदू सांघ अबक आणि बकई हेरोन  $\triangle$  (१७ सि. प्र.) व  
रावर आहेत आणि (१४ सि. प्र.) अबकडस. चौ. = २५ अबक  
आणि अबकवि. = बकई वि.  $\therefore$  अबकडस. चौ. = बकईवि. हे  
सिद्ध.

### वेचाळिसावासिदांत.

दिष्टे त्या त्रिकोणाशी क्षेत्रफळाने बराबर आणि जाचा एक कोन दि  
लेले कोना बराबर होईल असा एक स. चौ. कर.

अबकवि. बराबर आणि दु कोना बराबर  
कोन करणारा एक स. चौ. कर.



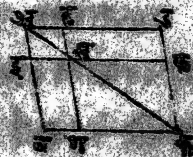
अबकवि. ची बकबाजू स्थळी दु भागून अई सांघ आणि ईक  
शीई बिंदूतून दु कोना बराबर कोन करणारी ई फरेघ कर. आणि फई  
शींकग बबक शीं अगस. कर (१८ सि. प्र.) अबई आणि अकई  
वि. परस्पर बराबर. अबक वि. ईकअ वि. चे दुप्पट आहे (१९ सि.  
प्र.) फईकग स. चौ. ईकअ वि. चे दुप्पट आहे. (२० सि. प्र.) अबकवि.  
कगफईस. चौ. चे बराबर आहे हे सिद्ध.

### वेचाळिसावासिदांत.

ह. २८

स. चौ. चे कर्ण रेघेचे दोहो कडे जे स. चौ. कांय मेट होता ते परस्पर  
बराबर.

अबकडस. चौ. त अक कर्ण रेघेचे दोहो कडे वस,  
सड स. चौ. कांय मेट आहेत ते परस्पर बराबर आहेत.



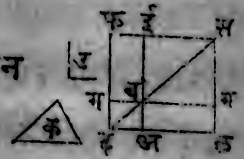


(१४ सि० प्र०)  $\Delta$  अबक =  $\Delta$  अडक न सेंच  $\Delta$  आईस =  $\Delta$  अइस  
 $\Delta$  सफक =  $\Delta$  सगक यांतील दुसरें वतिसरें समी० मथमांतून वजा  
करून, बस = सडहें सिद्ध.

### चवेचाळिसा वासिद्दांत.

दिलेल्या त्रिकोणाबराबर, दिलेले रेषेवर आणि दिलेला कोन क  
रणारें असें स० चौ० करावयाचा.

क त्रि० बराबर आणि ड कोनाबराबर कोन  
करणारें अबरे रेषेवर स० चौ० करावयाचें.

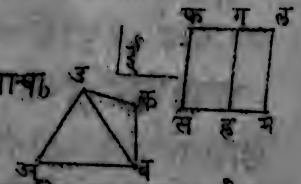


(४२ सि० प्र०) क त्रि० बराबर व ड कोनाबराबर कोन करणारें फग  
बईस चौ० कर आणि तो असा ठेवकीं बई आणि अब मिळून एक स  
र करे घडोईल. नंतर फग वाटीव अशीकीं, गह = ब अ होईल. गब  
शीं हल स० कर बह कर्ण रेषे करून ती पुढें वाटीव आणि गब शीं  
फस, ब अ ईशीं सल स० कर गब, सल स० म स्थितीं मिळे पर्यंत वा  
टीव, तर ब अ लमहा इच्छिला स० चौ० झाला. कारण (४३ सि० प्र०) फ  
ब स० चौ० = बल स० चौ० आहे आणि (१५ सि० प्र०)  $\angle$  गबई =  $\angle$  अ  
बम आहे. अब रे रेषेवर इच्छिला स० चौ० झाला हें सिद्ध.

### पचेचाळिसा वासिद्दांत.

दिलेल्या चौ० कोनाकृती बराबर स० चौ० कर असा कीं जाचा एक को  
न दिलेल्या कोनाबराबर होईल.

ड अबक चौ० कोनाबराबर स० चौ० करावयाचा  
जाचा कोन दिले ई कोनाबराबर होईल.



डब बिंदू सांध आणि (४२ सि० प्र०) ड अब त्रि० बराबर व  $\angle$  एबअ  
 $\angle$  फसह कोन करणारा फसह ग स० चौ० कर आणि (४४ सि० प्र०) व

कडु त्रि० बराबर गह रेघेवर इ० बराबर गह म कोन करणाराग  
हमल स० चौ० कर तेन्ना फसमल हा इच्छि अस० चौ० झाला हे सिद्ध.  
कु० जाचें क्षेत्रफळ एका दिलेल्या सरळ रेघाकृति बराबर होईल,  
बजाचा एक कोन दिले कोना बराबर होईल, असा स० चौ० दिले रेघे  
सकसालावावा, हें या सिद्धांता पासून स्पष्ट कळून येतें.

शेचाळिवासिद्धांत. ह० कु० १-

दिलेल्या सरळ रेघेवर चौरस करावयाचा.

अव रेघेवर चौरस करावयाचा.

अव पर अकलंब कर आणि अव = अड पे.

इ बिंदूतून अव शी इ ई स० कर नशीच अड  
शी बई स० कर तर अव ई इ चौरस होईल.



अव = अड आहे. (११ सि० प्र०) इ ई, ब ई याही अवचेव  
रापर आहेत. अका० आहे. (२२ सि० प्र०) चारही कोन का० आ  
हेतः अव ई इ चौरस आहे हे सिद्ध.

कु० स० चौ० त एक कोन ला० असला तर चारही कोन का० असतात.

सत्येचाळिसावासिद्धांत. ह० कु० २४

का० त्रि० त कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बरा आहे.

अवक का० त्रि० त अ कोन का० असेल

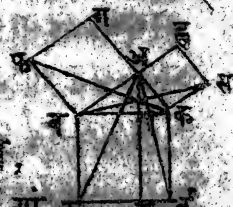
तर, बक = अव + अक होईल.

बक वर बई आणि अव, अक यांवर बग,

अस चौरस कर आणि कक वस अड अई सां इ ई

ध आणि बड शी अलस कर. बक आणि बड हे दोन Δ (११ सि०

प्र०) एकरूप. (११ सि० प्र०) बग, बक फ० Δ चे दुप्पट आहे. तसेंच बड



का. चौ. अबेड  $\Delta$  चे दुपटः. (१प्र.प्र.) अब चावर्ग, बलका. चौ. चे व  
रावर. या प्रमाणे अक चावर्ग, कलका. चौ. वरावर आहे.  $\therefore$  अब +  
अक = बक हे सिद्ध.

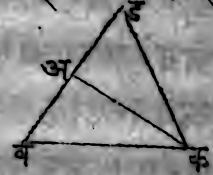
कु. का.  $\Delta$  त कोण त्याही बाजूचा वर्ग कर्ण आणि दुसरी बाजूचे  
वर्ग चावर्गाचा वरावर आहे.

**अठथे चाळिसावा सिद्धांत.** ह. ३४ कु.

त्रि. चा एक बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गावरावर असे  
लतर, तो काट. त्रि. होईल.

अबक त्रि. बक = अब + अक असेल तर

अबक हा का. त्रि. होईल.



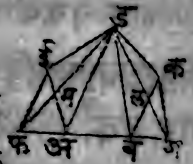
अकवर अस्थवी अडलंबकर आणि अब = अडकरून, कड  
सांध. तर (१७ सि.प्र.) अड + अक = कड आणि (मतिज्ञेय)  
अब + अक = कड; परंतु अब = अड आणि अक साधारण आहे  
 $\therefore$  बक = बड तेव्हा अबक आणि अकडे दोन त्रि. एकरूप. परंतु अकड  
हा का. त्रि. आहे.  $\therefore$  अबक हा का. त्रि. आहे, हे सिद्ध.

**बसिद्धांत.** ह. कु. ३७

दिलेल्या आकृती वरावर त्रि. करावयाचा.

अबकडईया आकृती वरावर त्रि. करावयाचा.

अड, बड सांधून, त्याशी अनुक्रमेण ई आणि क  
स्थळापासून ईफ, कग संरेषा कर. अब दोहोंक

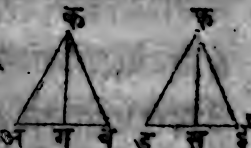


डे फ आणि ग स्थळांपर्यंत वाटीव फड, गड सांध. तेव्हा कगड हा  
इच्छिळा त्रि. झाला. कारण फईड आणि फईअ हे दोन त्रि. (३७  
सि.प्र.) वरावर यांतून साधारण  $\Delta$  फमई वजा जातां, बाकी  $\Delta$

ईमड =  $\Delta$  फमअ- तसेंच दुसरे बाजूस  $\Delta$  कलड =  $\Delta$  बलग आ  
हे. अबकडईयाक्षेत्रांतून,  $\Delta$  ईगड आणि  $\Delta$  कलड हे वजा क  
रून, त्यांचे बदल  $\Delta$  फलम आणि  $\Delta$  बलग मिळविले असता  $\square$   
अबकडई =  $\Delta$  फगड आहे हे सिद्ध.

### क सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजू बराबर अस  
तील, बबरोवरीचा बाजू पैकीं सजातीय बाजू समोरील एकाचा ए  
क कोन दुसऱ्याचा एक कोन बराबर असेल; तर ते दोन त्रिकोण एक  
रूप होतील.

अबक आणि डईफ या दोन त्रि. त एकाचा   
अब, अक बाजू व ब कोन, दुसऱ्याचा डई, ड अ ग व ड त ई  
फ बाजू व ई कोन यांचे बराबर असतील तर हे दोन त्रि. एकरूप होतील.

क आणि फ कोनापासून अब, डई रेषांवर क ग फसलंब कर  
तर बक ग आणि ईफ स हे दोन  $\Delta$  (१२ सि. ४ कु. प्र. आणि २६ सि. प्र.)  
एकरूप कग = फस आणि गव = सई आतां अक ग आणि डफ  
स या दोन  $\Delta$  त (४० सि. कु. प्र.) अग = डस आहे आणि (वर सि  
द्ध केल्याप्र.) गव = सई आहे तेव्हां (२३ प्र.) अब = डई. (८ सि. प्र.)  
अबक आणि डईफ हे दोन त्रि. एकरूप हे सिद्ध.

### पहिल्या बुकाचे प्रश्न.

१ समदि बाजू त्रिकोणांत शिरकोनास दुभागणाशीरे घ पायासलं  
चानें दुभागिले. . . . . ह. ३ सि. १ कु.

२ दिलेल्या दोन बिंदूपासून दिलेल्या रेषेत सारखे अंतरावर एक  
बिंदू काढावयाचा.



- ३ एक रेख दु भागून तिज वरलंब केला असतां लंबां तील कोणताही बिंदू रेखेचा दोनही शेवटां पासून बराबर अंतरानें असतो आणि लंबां तील बिंदू शिवाय कोणताही बिंदू बराबर अंतरानें असणारा नाही.
- ४ दोन बिंदू सांधणाऱ्या रेखेचा मध्यातून एक रेख काढिली, आणि छेदन बिंदू पासून बराबर अंतरानें या रेखेंत दोन बिंदू घेतले, तर ते मूळ बिंदू पासून बराबर अंतरानें असतील.
- ५ सांगितल्या बिंदू पासून सरळ रेखेवर जा रेखा करितां येतात. त्यां तलंब रेख सर्वांत उहान होईल. आणि तिजवरील रेखा अनुक्रमे मोठ्या होत जातील. . . . . ह० २१
- ६ त्रि० चे दोन बाजूंची चजावाकी तिसरे बाजू हूबकमी असते. ह० ११
- ७ दिलेले दोन बिंदू सांधणाऱ्या रेखेचा मध्यातून जाणाऱ्या रेखेवर दिलेले दोन बिंदू पासून लंब केले, तर ते परस्पर बराबर होतील.
- ८ कोन दु भागणाऱ्या रेखेंतील कोणताही बिंदू बाजूं पासून बराबर अंतरानें असतो.
- ९ समांतर आणि बराबर रेखांचीं च्युलकमखेकें सांधणाऱ्या रेखा परस्परांस दु भागितात.
- १० समदि बाजू का० त्रि० त बाकी सहिलेले कोन अर्ध अर्ध काट-कोना बराबर असतात.
- ११ समदि बाजू त्रि० चे शिरकोना कडील बाजू वाढविली असता बाहेरील कोन पाया कडील कोणतेही कोनाचे दुप्पट होतो.
- १२ जर कोणत्याही त्रिकोणाचा बाहेरील बऱ्याचा आंतिळाचे समोऱ्या कोन हे जर दुसऱ्या त्रिकोणाचा सजातीय कोनाचे अनुक्रमे दुप्पट असतील, तर पहिल्याचा तिसरा कोन दुसऱ्याचा तिसरे कोनाचे दु

पट होईल

१३ समांतर रेखांस छेदणारी अशी रेघ करकी, जिचा मधील खंड दिलेल्या रेघेबरोबर होईल.

१४ दिलेल्या बिंदूतून अशी रेघ करकी, ती दिलेल्या दोन रेखांस छेदील, आणि त्या रेखांशी समान कोन करील.

१५ परस्पर रेखांच्या अशा दोन रेखा दुसऱ्या दोन रेखांशी समांतर असल्यास पहिल्या रेघेतील कोन दुसऱ्या रेघेतील कोना बरोबर होईल.

१६ त्रिकोणाचा दोन बाजूंची बेरीज, पायाचा मध्य आणि शिरकोन सांधणाऱ्या रेघेची दुप्पट यांवेक्षा मोठी असते.

१७ का त्रिकोणांत कर्ण आणि दुसरी बाजू यांची वजाबाकी, किंवा बेरीज आणि तिसरी बाजू यांपासून का त्रिकोण करतायाचा.

१८ समांतर रेखांमध्ये अशी रेघ करकी, जी दिलेल्या बिंदूस्थळीं दुभागिली जाईल.

१९ सम द्विबाजु त्रिकोणाचा पायांतील कोणत्याही बिंदूपासून दुसऱ्या दोन बाजूंवर लंब केले असता, त्यांची बेरीज पायाकडील कोना पासून समोरचे बाजुवर केलेले लंबाबरोबर आहे.

२० त्रिकोणाचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेखांचा छेदन बिंदू आणि शिरो बिंदू सांधणारी रेघ त्रिकोणास दुभागिते.

२१ सम बाजु त्रिकोणांतील कोणत्याही बिंदूपासून तीनही बाजूंवर लंब केले असता, त्यांची बेरीज त्या त्रिकोणाचे उंची बरोबर असते.

२२ त्रिकोणाचा शिरकोन विशाल, काट कोन, किंवा लघु कोन, तर त्याचे पायाचा मध्य आणि शिरो बिंदू सांधणारी रेघ पायाचे अ

धातून अनुक्रमें लहान, बराबर, किंवा मोठी होईल.

२३ त्रिकोणाचा दोन बाजू दुभागणाऱ्या लंबाचा छेदन बिंदू पासून तिसऱ्या बाजूवर लंब केल्या, तर तो तीस दुभागील.

२४ त्रिकोणाचा शिरकोनास दुभागणारी, व पायावर लंब असणारी या रेषांमध्ये जो कोन होतो, तो पायाकडील कोनाचे वजाबाकी बराबर होतो.

२५ दिले रेषेन असा बिंदू काढा, त्या बिंदू पासून दिलेले दोन बिंदू पर्यंत रेषा काढल्या असतां जे कोन पडतील ते बराबर होतील.

२६ त्रिकोणाचा दोन बाजूंची बेरीज व पायाकडील कोन यां पासून त्रिकोण कर.

२७ त्रिकोणाचा पायाचा दोनही शोण या पासून समोरचा बाजूस दुभागणाऱ्या रेषेचा छेदन बिंदू आणि शिरो बिंदू सां धणारी रेषा यास दुभागील.

२८ एका पायावर त्याचा एकाच बाजूस एकांत एक अत्रंग समान बहुकोनाकृति असल्या, तर आतील आकृतीची परिमिति बाहेरील आकृतीचे परिमिती पेक्षा लहान होईल.





## बूक दुसरें.

### प्रथम सिद्धांत.

ह. २०

जे का. चौ. एक अखंड रेघ आणि दुसरे खंड रे घेचे तुकडे यांत हो जात, त्याची बेरीज त्याच दोन अखंड रेघांत जो का. चौ. होतो, त्याचे बराबर आहे.



बग अखंड रेघ आणि बक खंड रेघ बड, डई, ईक तुकड्यांनीं दु भागिली तर, बग, बक या रेघांत जो का. चौ. होतो, तो बग, बड, बग, डई, बग, ईक, यांचे का. चौ. कोनाचे बरे जे बराबर आहे.

बड का. चौ. बग, बक या दोन अखंड रेघांनीं कर आणि डस, ई ल या रेघा बक वर लंब अथवा बग वर लंब कर आतां बड का. चौ. बस, डल, ई ह या का. चौ. नीं झाला आहे आणि हे लहान का. चौ. बग, बड, डस, डई, ईल, ईक, या रेघांत आहेत; परंतु (१ बु. ३४ सि. ३.) डस, ईल रेघा बग चे बराबर आहेत. हे का. चौ. बग, बड, बग, डई, बग, ईक, या रेघांत होतान त्यांचे बराबर आहेत; बग, बक हा का. चौ. बग, बड, बग, डई, बग, ईक, या का. चौ. बराबर आहे हे सिद्ध.

### दुसरा सिद्धांत.

एकरे घेचे कसेही दोन भाग केले असतां, प्रत्येक भाग आणि सर्व रेघांचे का. चौ. चे बरे जे बराबर सर्व रेघेचा वर्ग आहे.

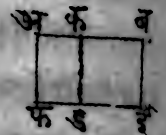
प्रथम सिद्धांता प्रमाणें सिद्ध.



## तिसरा सिद्धांत.

एका रेघेचे कसे ही दोन भाग केले असतां, सर्व रेघ आणि एक भाग यांचा का. चौ. दोन भागांचा का. चौ. आणि पूर्वी घेतलेला गा. चा वर्ग यांचे बेरजे बराबर आहे.

अब रेघेचे अक, बक हे दोन भाग केले, तर  
अब. बक = अक. बक + बक होईल.



अब रेघेवर अब, बक रेघांनी अई का. चौ. कर आणि क बिंदूतून कड रेघ अफशीं अ. बई शींस. कर. म्हणजे कई, बक चा वर्ग होईल. कारण बई = बक आहे.

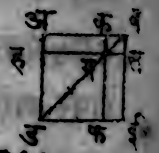
आतां अई का. चौ. अड, कई या दोन आकृतीं मिळून झाला आहे परंतु अड आकृति अक, बक रेघांचे का. चौ. बराबर आहेत कई, बक चे वर्ग बराबर आहे. अब. बक = अक. बक + बक हे सिद्ध.

## चवथा सिद्धांत.

ह. ३१

एका रेघेचे दोन भाग केले असतां, सर्व रेघेचा वर्ग दोन भागांचे वर्गांचे बेरजे हून दोन भागांचे का. चौ. चे दुपटीने अधिक आहे.

अब रेघेचे अक, बक हे दोन भाग केले असतां  
अब = अक + बक + २अक. बक होईल.



अब रेघेवर अडई ब वर्ग कर. वड सांध. क बिंदूतून कफ रेघ अडशीं अ. बई शींस. कर. तसें ग बिंदूतून ह सरेंच अब शीं अ. डई शींस. कर.

आतां (१बु. २९ सि. म.) <अडब = <कगब आणि (१बु. २९ सि. म.)

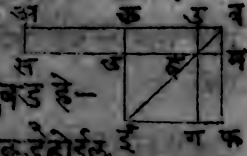
<अडब = <अबड आहे. (१म. म.) <कगब = <कबग. (१बु. २९ सि. म.)

म. कग, कब चे बराबर आणि (१बु. २९ सि. म.) कग, कब त्याचे-

समोरचे गस, बसचे वरावर :: कस आकृति सम बाजू आहे, आणि ति  
चा क कोन का. आहे :: (१ बु. ४६ सि. प्र०) त्या आकृतीचे चारी कोन  
का. आहेत :: कस, कब चा वर्ग आहे. या प्रमाणे चहफ, अक चा व  
र्ग आहे (१ बु. ४३ सि. प्र०) अग, मई हे का. चौ. परस्पर वरावर आ  
हेत. आतां अई वर्ग चार आकृति मिळून झालेला. सणजे अक, ब  
करे घांचे दोन वर्ग आणि अक, ब करे घांचे का. चौ. चौ दुप्पट ::  
अबै = अकै + बकै + अक. बक आहे हे सिद्ध.

कु. चौ रसांत जास. चौ. तून कर्ण रेघ जात्ये, ते ही चौ रस असतात  
पांच वासिद्धांत.

कोणत्या ही रेघेचे दोन सम व दोन विषम भाग केले, तर विषम भागा  
चा का. चौ. आणि सम व विषम भागांस धील अंतराचा वर्ग एक सम  
भागाचे वर्ग बिराबर आहे.



अब रेघेचे अक, बक हे दोन सम अड, वड हे -  
दोन विषम भाग केले तर, बकै = अड × वड + कड हे सिद्ध  
बक रेघेवर कफ वर्ग किडू बि तांधड बिंदू तून डग, कडू वी अथ.  
बफ शी स कर आणि ह बिंदू तून सम, अब शी अक शी स कर आणि  
अस, बफ शी स कर.

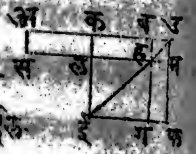
(१ बु. ४३ सि. प्र०) कह = हफ यांत ह ममिळी व. ते कां कम = डफ या -  
दोहोत क ह ममिळी विला असतां अह सणजे अड. वड = कम + मग अ.  
कमग या दोन ही पेठ्यांत लव सणजे कड चा वर्ग ममिळी व. ते कां अह  
+ लग = रुम + कमग :: अड × वड + कड = बकै हे सिद्ध.

कु. दोन रेघांचे वर्गांची वजाबाकी, त्या दोन रेघांची बेरीज आणि  
वजाबाकी यांचे का. चौ. चे वरावर आहे. - - - - - ह. ३३

### सहावासिद्धांत.

कोणत्याही रेघेचे दोन समभाग करून ती पुढे वाढविली असता, वाढविल्या सहित सर्व रेघ आणि वाढविलेल्या भाग यांचा का. चौ. आणि अर्धाचा वर्ग यांची बेरीज, अर्धरेघे अधिक वाढविलेल्या भाग यांचे वर्ग बरोबर आहे.

अवरेघेचे अक, बक दोन समान भाग करून पुढे - स  
दुपटीत वाढविली असता, अड. बड + बक = कड होईल.



कड रेघेवर कक वर्ग करून, बाकी सर्व कृत्य (५ सि. प्र.) कर.

(१ बु. ३६ सि. प्र.) अल का. चौ. = कह का. चौ. आहे (१ बु. ४३ सि. प्र.)

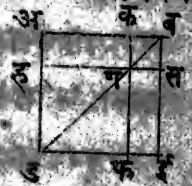
कह = हफ. (१ प्र. प्र.) अल = हफ या दोहोत कम मिळविला असता कमग आकृति, अम का. चौ. चे बराबर यांत लग लागजे वक मि. तेव्हा कमग + लग = अम + लग. अड. बड + बक = कड आहे हे सिद्ध.

### सातवासिद्धांत.

रेघेचे कसेही दोन भाग केले असता, सर्व रेघ आणि कोणताही एक भाग यांचे वर्ग चौ. बेरीज, दुसरे भागचे वर्ग होऊन, सर्व रेघ आणि प्रथम भाग यांचे का. चौ. चे दुपटीने अधिक आहे.

अवरेघेचे अक आणि बक हे दोन भाग केले तर,

अब<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + २ अब × बक होईल.



अब वर अड वर्ग करून बड सांध. कविंदूतून अड आणि अ. बड आणि फ आणि ग विंदूतून अब आणि अथवा डड आणि ह स स. कर.

(१ बु. ४३ सि. प्र.) अग, गड हे का. चौ. बराबर यांत कम मिळविला तर, अस = कड आणि अस + कड = २ अस = असफ + कस = २ अब. बक यांत हफ चौ. मिळीव. तेव्हा असफ + कस + हफ = अड. बक.

हफयांत असफ + हफ = अब, कस = बक, आणि हफ = अकः

अब + बक = २अब + बक + अक आहे. हें सिद्ध.

दुसरा प्रकार. (१ बु. ५ सि. प्र.) अब = अक + बक + १अक बक

यांत बक मिळीव. अब + बक = अक + १बक + १अक बक. बु.

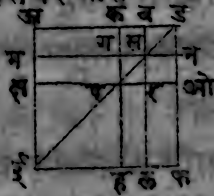
(१ सि. प्र.) किंमत मांडून अब + बक = २अब + बक + अक हें सिद्ध.

कु. दोन रेखांचे वर्गांची बेरीज, त्या रेखांचे का. चौ. ची दुप्पट आणि त्यांचे वजाबाकीचा वर्ग यांचे बेरजे बराबर आहे. --- ह. २२

### आठवासिद्धांत

रेखांचे कसे हो दोन भाग केले, तर सर्व रेखाणि कोणताही एक भाग यांचा का. चौ. ची चौपट आणि दुसरे भागाचा वर्ग यांची बेरीज, सर्व रेखाणि प्रथम घेतला भाग यांचे बेरजेचे वर्ग बराबर आहे.

अब रेखांचे अक, बक असे दोन भाग केले, तर, १अब + बक + अक = (अब + बक) होईल.



अब रेखांचे दुपट्यांत वाढीव. अशी की, बड = बक होईल; नंतर अडवर अफ वर्ग कर, ईड सांधक आणि बबिंदूतून कड; बल रेखा अई तीं अडफ तीं स. कर. तसें प आणि स बिंदूतून मन आणि क्ष ओ रेखा अड तीं अईफ तीं स यांतर कर, कब = बड आहे. बु.

(११ सि. प्र.) कब = बड = गस = सन = पर = रओ. (१ बु. १३ सि. प्र.)

□ कस = □ बन आणि □ गर = □ सओ आतां (१ बु. १६ सि. प्र.) □

कस = □ सओ. कस, बन, गर, सओ हे चारही का. चौ. बराबर आहेत, तेव्हां ते सर्व मिळून □ कस चे चौपट आहेत.

वर सांगितल्याप्र. कग = गप आहे. □ अग = □ मप आणि पर = रओ आहे. □ पल = □ रफ. (१५ प्र.) अग, मप, पल, रफ



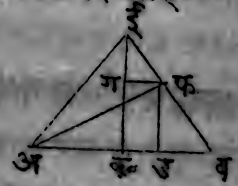
हे चारही का. चौ. परस्पर बराबर अ. हे चार मिळून अगचे चौपट आहेत.  
 आतां हे व पूर्वीचे चार का. चौ. मिळून असचे चौपट आहेत. ह्या  
 जे भव. बकची चौपट आहे, अ. अओहवराबर आहे. यांत हा हसणजे  
 अकचा वर्ग मिळविला असतां अडवर्गा बराबर आहे,  $\therefore ५अव \times$   
 $बक + अक = (अव + बक) = अड$  हे सिद्ध.

१ कु. दोन रेखांचे का. चौ. चौ. चौपट आणि त्या दोन रेखांचे वजावाकी  
 चा वर्ग यांची बेरीज त्या दोन रेखांचे बेरजेचे वर्गाबरोबर आहे.  
 २ कु. कोणत्याही रेखाचा वर्ग तिचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे. ३ कु.

### नववासिद्धांत.

कोणत्याही रेखेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले तर असमा  
 न भागांचे वर्गांची बेरीज, त्या रेखेचे अर्धाचे वर्गाची दुप्पट आणि वे  
 दन बिंदूतील अंतराचे वर्गाची दुप्पट यांचे बेरजेबरोबर आहे.

अब रेखेचे अक, बक हे दोन समान भाग  
 आणि अड, कड हे दोन असमान भाग केले,  
 तर  $अड + बड = २अक + २कड$  होईल.



अब रेखेचे क मध्यावर फईलंब करून, तो अकचे बरोबर कर. अई,  
 बई सांप. तसें उ स्पष्टी उ फलंब बईस मिळे पर्यंत कर आणि फग  
 रेख बकशी स. कर आणि अफ सांध.

(१ बु. ५ सि. प्र.)  $\angle कअई = \angle कईअ$  आणि  $\angle कका$  आहे. ते नये  
 कीं अर्धे का. आहेत तसेंच ईगफ आणि फडब या  $\angle गईफ = \angle गफ$   
 ई,  $\angle डफब = \angle डबफ$ . (१ बु. ६ सि. प्र.) गफ = ईग आणि फड = बड.  
 अकई का. वि. त अकई + कईअ अ.  $२अक = अई$ , गफई का.  
 वि. त गई + गक अ.  $२गक अ. २कड = ईक$  (२ प्र. म.) २अ

अक + २ कड = अई + ईफ, अई + ईफ = अफ. अफ =  
अड + फड अ. वड. २अक + २कड = अई + वड हे सिद्ध

### दहावासिद्धान्त.

एकारेघेचे दोन समान भाग करून ती पुढे वाढविली असता एक  
दर रेघेचा वर्ग आणि वाढविलेले रेघेचा वर्ग यांची बेरीज त्या रेघेचे अ  
र्धचे वर्गाची दुप्पट आणि अ परिघ व क व विला भाग मिळून जी रेघ  
होत्ये, तिचे वर्गाची दुप्पट यांचे बेरजे बराबर आहे.

अब रेघ क स्थळीं दुभागून ड पर्यंत वाढविली अ  
सतां अड + वड = २अक + २कड होईल.



अब रेघेवर क स्थळीं अकचे बराबर कड लांब कर अई, वई  
सांध, कड रेघेवर कड, कड रेघांनीं कफ स. चौ. कर. नंतर वई,  
फड वाढीव. अशा कीं, ग स्थळीं परस्परांस छेदितील. नंतर अग  
सांध.

अक कड, कक या बाजू परस्परां बराबर आहेत. (१ बु. ५ सि. प्र.)  
या खुणेचे सर्व कोन बराबर आहेत. आणि क स्थळावरील दोनही  
कोन प्रत्येकीं का. आहेत. (२) या खुणेचे सर्व कोन प्रत्येकीं अर्ध  
अर्ध का. आहेत. सर्व < ई = एक का. आहे. (३ बु. ५ सि. प्र.) व  
स्थळावरील समोरा समोरचे कोन बराबर आहेत आणि ते प्रत्येकीं  
अर्ध का. आहेत. ड आणि फ हे दोन प्रत्येकीं का. आहेत. (४) या  
खुणेचे सर्व कोन बराबर असून प्रत्येकीं अर्ध का. आहेत. (५ बु.  
५ सि. प्र.) फई = फग आणि डव = डग आहे.

(१ बु. ५ सि. प्र.) अक + कड अ. अक = अई

तसें (फग + फई) अ. रफई अ. रकड = ईग

बेरीज करत, २अक + २कड = अई + ईग

अई + ईग = अग, अग = अड + डग अथवा बडः २अक + २कड = अड + बड हे सिद्ध

### अकरावा सिद्धांत.

सांगितले रेघेस मध्यप्रमाणाने छेदायाचें.

अब रेघेस मध्यप्रमाणाने छेदायाचें.

अब रेघेवर अक डबवर्ग कर अकरेघ ई स्थळीं-

दुभागून, बई सांध अक वादीव, अशी की, ईफ = ईब, अफ रेघेवर अगवर्ग करत, गह, स पर्यंत वादीव.

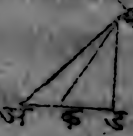
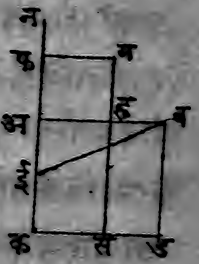
(२ दु. ६ सि. प्र.) फई = कफ × अफ + अई परंतु फई = बई आ हे. बई = कफ × अफ + अई (१ दु. १० सि. प्र.) बई = अई + अबः अई + अब = अफ. कफ + अई दोनही पेठ्यांत अई नजा करत, अब = कफ × अफ.

अब यावर्ग (अड) आणि कफ × अफ (फस) यांतून साधारण असबजा केला तर, बाकी फह = हड आतां फह (अह यावर्ग), हड (अब, हब यांचा का. चौ.) ∴ अब रेघ ह स्थळीं मध्यप्रमाणाने दुभागिली होई.

### बारावा सिद्धांत.

ह. ३६

विशाळ कोन विकोणांत विशाळ कोना समोरचे बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरीजेइतका आया आणि विशाळ कोना पासून लंबा पर्यंत जे अंतर, या दोन रेखांचे का. चौ. जे दुपटीने अधिक आत अक त्रिकोणाक कोन आडे आणि अकसा या वाटवून, गिर कोना पासून बड लंब केला आहे, तर अब



= बक<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> + २अक · कड होईल.

(१बु. ४सि. प्र.) अड<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + कड<sup>२</sup> + २अक · कड यांत साधारण बड<sup>२</sup> मिळीव तेव्हां अड<sup>२</sup> + बड<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + कड<sup>२</sup> + बड<sup>२</sup> + २अक · कड (१बु. ४०सि. प्र.) किंमत मांडून, अब<sup>२</sup> = बक<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> + २अक · कड हें सिद्ध.

### तेरावासिद्धांत. ह. ३७

कोणत्याही त्रिकोणांत लघुकोणासमोरचे बाजूचा वर्ग, दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांहून; पाया आणि लघुकोनापासून लंबापर्यंतचे अंतर या दोन रेखांचे का. चौ. चे दुपटीने उणा आहे.

अबक  $\triangle$  त लघुकोन आहे आणि बक पायावर अड लंब केला आहे, तेव्हां अक<sup>२</sup> = अब<sup>२</sup> - बक<sup>२</sup> - २बक · बड होईल

प्रथम आकृतीत अड लंबांत पडतो, तेव्हां (१बु. ७सि. प्र.) बक<sup>२</sup> + बड<sup>२</sup> = २बक · बड + बड<sup>२</sup> यांत साधारण अड<sup>२</sup> मिळीव तेव्हां बक<sup>२</sup> + बड<sup>२</sup> + अड<sup>२</sup> = २बक · बड + बड<sup>२</sup> + अड<sup>२</sup> (१बु. ४०सि. प्र.) किंमत मांडून व स्थ. क. अक<sup>२</sup> = अब<sup>२</sup> - २बक · बड = अक<sup>२</sup> हें सिद्ध.

दु. आ. तीत लंब बाहेर पडतो तेव्हां, (२बु. १२सि. प्र.) अब<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> + २बक · कड यांत साधारण बक<sup>२</sup> मिळीव, तेव्हां अब<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + २बक<sup>२</sup> + २बक · कड साधारण गुणक काढून अब<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> + २बक · बड स्थ. क. अब<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> - २बक · बड = अक<sup>२</sup> हें सिद्ध.

ति. आ. अक व बक वर लंब आहे, तेव्हां (१बु. ४०सि. प्र.) अब<sup>२</sup> = बक<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> स्थ. क. अब<sup>२</sup> - बक<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup> (अब<sup>२</sup> + बक<sup>२</sup> - बक<sup>२</sup> = अक<sup>२</sup>)



बक<sup>२</sup> - स्वक. वक<sup>२</sup> ) हे सिद्ध

### चबदावासिद्धांत.

दिलेल्या आकृती बराबर एक चौरस करावयाचा.

आ दिलेली आकृति आहे. या आकृती बराबर

(१ बु. ४५ सि. म.) बकडई का. चौकोन कर.

बाजू बाढीव अशी की, ईफ = ईड होईल. नंत.

रबफवखडफ अर्धवर्तुळ कर. डई परिघावर ह पर्यंत वाढवून ग  
ह त्रिज्या कर. तेखां ह ई रेघ चौरसाची बाजू झाली. जो चौरस सांगि  
तल्या आकृती बराबर होईल.

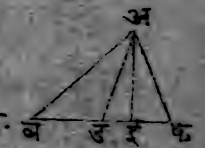
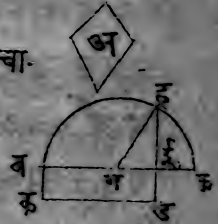
(२ बु. ५५ सि. म.) बई × ईफ + गई<sup>२</sup> = गफ<sup>२</sup> अ. गह<sup>२</sup> (१ बु. ४७  
सि. म.) गह<sup>२</sup> = गई<sup>२</sup> + हई<sup>२</sup> ∴ बई × ईफ + गई<sup>२</sup> = गई<sup>२</sup> + हई<sup>२</sup>  
स्थ. क. बई × ईफ = हई<sup>२</sup>, बई × ईफ = बड का. चौ. जो आ  
आकृती बराबर आहे. ∴ आ = हई<sup>२</sup> आहे हे सिद्ध.

### अ सिद्धांत.

ह. २८

कोणत्याही त्रिकोणांत शिरकोना पासून पायाचे मध्यापर्यंत  
केलेले पांचे वर्गाची दुप्पट आणि अर्धपायाचे वर्गाची दुप्पट यांची  
बेरीज दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बराबर आहे.

अबक त अड रेघ बक पायाचे ड मध्यापर्यंत  
केली आहे, तर २बड<sup>२</sup> + २अड<sup>२</sup> = अब<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> होईल. व ड ई फ  
बक पायावर अई लंब कर (१ बु. २७ सि. म.) अब<sup>२</sup> = बई<sup>२</sup> + अई<sup>२</sup>  
आणि अक<sup>२</sup> = कई<sup>२</sup> + अई<sup>२</sup> (२ म. म.) अब<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> = बई<sup>२</sup> + कई<sup>२</sup> +  
२अई<sup>२</sup> (२ बु. १ सि. म.) बई<sup>२</sup> + कई<sup>२</sup> = २बड<sup>२</sup> + २अड<sup>२</sup> ∴ अब<sup>२</sup> + अक<sup>२</sup> =  
२बड<sup>२</sup> + २अड<sup>२</sup> + २अई<sup>२</sup> (१ बु. ४७ सि. म.) २बड<sup>२</sup> + २अड<sup>२</sup> = २अड<sup>२</sup> ∴ आ



बै-अकै = २अडै + २बडै हे सिद्ध.

### वसिद्धांत. ह. ४०

सं. चौ. त कर्णरेखा परस्परांसदुभांगितान, आणि सांचे वर्गों  
ची बेरीज त्याचारबाजूंचे वर्गांचे बेरजे बराबर आहे.

अक सं. चौ. त अक, बड या दोन कर्णरेखा आहे.  
त. तर अई = ईक, बई = ईड आणि अकै + बडै =  
अबै + बकै + कडै + डअ होईल.



(१ बु. २९ सि. प्र.) (१) या खुणेचे सर्व कोन परस्पर बराबर आणि

(२) या खुणेचे वतसे (३) या खुणेचे ही बराबर. (१ बु. १५ सि. प्र.)

स्थळीचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर. (१ बु. ३४ सि. प्र.)

अड = बक आहे. (१ बु. २९ सि. प्र.) अई = ईक आणि बई =

ईड आहे हे सिद्ध.

(१ बु. अ सि. प्र.) अबै + बकै = २ बई + २ अई आणि कडै + डअ

= २ डई + २ बई + २ अई (२ प्र. प्र.) अबै + बकै + कडै + डअ

= ४ बई + ४ अई (१ बु. ८ सि. प्र. २ कु. प्र.) ४ बई + ४ अई = अकै

+ बडै. अबै + बकै + कडै + डअ = बडै + अकै हे सिद्ध.

### कसिद्धांत. ह. ३५

त्रिकोणांत शिरकोना पासून पायावर लंब केला असता, दोन

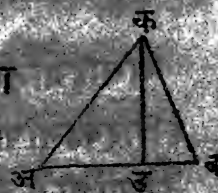
बाजूंचे वर्गांची वजाबाकी पायाचे दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी

बराबर आहे.

अबक त्रिक. त क शिरकोना पासून अब पाया

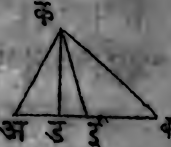
वर कड लंब केला आहे; तर अकै - बकै =

अडै - बडै होईल.



(१ बु० ४० सि० प्र०) अकै = अडै + कडै आणि बकै = बडै + कडैया  
दोन समीकरणांची वजाबाकी क० अकै - बकै = अडै - बडै हें सिद्ध.

१ कु० त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांचा  
का० चौ० पाया आणि लंबा पासून पायाचे मध्या पर्यंत अंतर या  
चा का० चौ० चा दुपटी बराबर आहे.

अबक  $\triangle$  त अब पायास कडू दुभागते, व  
कड, अब पायावर लंब आहे; तेव्हा (अक +  
बक)  $\cdot$  (अक - बक) = २ अब  $\cdot$  डई होईल.   
अकै - बकै = अडै - बडै (वर सिद्ध के त्या म०) परंतु अकै - बकै  
= (अब + बक)  $\cdot$  (अब - बक) आणि (बु० ५ सि० प्र०) अडै - बडै  
= २ अब  $\cdot$  डई  $\therefore$  (अक + बक)  $\cdot$  (अक - बक) = २ अब  $\cdot$  डई हें सिद्ध.

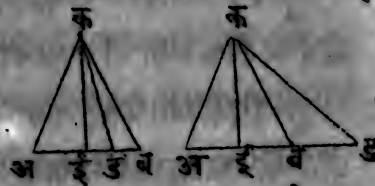
२ कु० दिलेले रेषेत एक बिंदु घेऊन, त्या बिंदु स्थळी लंब केला, आ  
णित्या लंबांत पाहिजे तितके बिंदु घेऊन, प्रत्येक बिंदूतून रेषेचा  
दोंका पर्यंत दोन दोन रेषा केल्या असता, प्रत्येक दोन दोन रेषांचा  
बर्गांचीं अंतरें बराबर असतात.

३ कु० दिलेले रेषेचे एके अंगास दोन बिंदु घेऊन त्या पासून रेषे  
चे दोन टोकां पर्यंत रेषा केल्या अशा कीं, त्यांचे बर्गांचीं अंतरें ब  
राबर आणि जर ते बिंदु दिलेले रेषेचा मध्यावर केले लंबाचा एके अं  
गास असतील, तर ते बिंदु सांधणारी रेषा दिलेले रेषेवर लंब होईल.

**इ सिद्धांत. ह० ३९**

समष्टि बाजू त्रिकोणांत पायावर अथवा पायाबादवून त्याजव  
र शिरकोना पासून एके रेषे केली असता, ती रेषा ब एक बाजू या  
चे बर्गांची वजाबाकी पायाचे दोन खंडांचे का० चौ० बराबर आहे.

अबक समदिवाजू  $\triangle$  त क शिर  
कोना पासून अब पायावर कडरे  
घकेली आहे, तर अकै-कडे =  
अड-बड होईल.



प्रथम आकृति-क शिरकोना पासून अब पायावर कडईलंबक  
रतो अबस दुभागील. (२बु. क सि. म०) अकै-कडे = अई-  
डई (२बु. ५ सि. कु. म०) (अई + डई) (अई-डई) = अड-बड  
∴ अकै-कडे = अड-बड हें सिद्ध.

दु. आकृति-अब पाया वाढवून त्याजवर क शिरापासून कड  
रेघकेली आहे. पूर्वी प्रमाणे कडईलंबकर. (२बु. क सि. म०) कडे  
- अकै = डई-अई (२बु. ५ सि. कु. म०) डई-अई यांची  
किंमत लिहून, कडे-अकै = अड-बड हें सिद्ध.

१ कु. दोनही आकृतींतील समीकरणास स्थळांक. असें सिद्ध  
होतें कीं, अकै = कडे ± अब-बड

२ कु. दोन विपमरेषांचे अंतराचें अर्ध त्यांचे बेरजेचे अर्धतिभि  
कविलें असतां मोठी रेषा, आणि वजा केलें असतां लहान रेषा होते.

अ—ड, ब—ड या दोन रेषा असतील तर,  $\frac{अड+बड}{२} +$   
 $\frac{अड-बड}{२} = अड$  आणि  $\frac{अड+बड}{२} - \frac{अड-बड}{२} = बड$  हें उघड आहे.

### दुसऱ्या बुकाचे प्रश्न.

१ कोणत्याही चौ. चें चार कोनांची बेरीज चार का. बराबर आहे. ह०

२ जा चौ. त समोरा समोरचा बाजू बराबर आहेत, तें स. चौ. आहे. ह०

३ दोन चौ. रसांचे वजावाकी बराबर एक चौ. रस करावयाचें.

४ कितीही चौ. रसांचे बेरजे बराबर एक चौ. रस करावयाचें.



- ५ स०चौ० तील एका बिंदू पासून त्याचे दोन समभाग करावयाचे.
- ६ का०चौ० तील एका बिंदू पासून चार कोना पर्यंत रेघा केल्या असतां, समोरासमोरचे रेघांचा वर्गाचा वेर जा बराबर होईल.
- ७ कोणत्याही त्रि०चे बाजूंतील एका बिंदू पासून त्याचे बराबर दोन भाग कर.
- ८ का० त्रि०चे कोणत्याही लहान बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू यांची बेरीज व कजावाकी यांचे का०चौ० बराबर आहे. ह० ३६ कु० १
- ९ तीन रेघा एका बिंदू स्थळीं छेदून बराबर सहा कोन करतील, तर कोणत्याही एका बिंदू पासून तीन रेघांवर लंब केले असतां दोन लहान लंबांची बेरीज मोठ्या लंबा बराबर होईल.
- १० का० त्रि०त का० पासून कर्णावर लंब केला असतां त्याचा वर्ग कर्णाचे दोन खंडांचे का०चौ० बराबर आहे. — — — — ह० ८०
- ११ एक बिंदू व तीन रेघा दिल्या आहेत, जांतून दोन स० आहेत. तर त्या स० रेघांमध्ये एक एक बिंदू शोधून काढ कीं, तो दिलेल्या बिंदू पासून बराबर अंतरानें होईल. वने दोन बिंदू सांधणारी रेघ तिसरे घेईल.
- १२ त्रि०चे दोन बाजूंचे मध्य सांधणारी रेघ पायाचे अर्धाबराबर आणि त्याशी स० असते.
- १३ कोणत्याही चौ० कोनाचे बाजूंचे मध्य सांधले तर, ती आकृति स०चौ० होईल.
- १४ एका रेषेचे असे दोन भाग कर कीं, एक भाग आणि दुसरी दिलेली रेघ यांचा का०चौ० दुसरे भागाचे वर्गाबराबर होईल.
- १५ दिलेल्या दोन रेघांपैकी एक इतकी वाढीव कीं, वाढविलेला

गाचा वर्ग तीरेघ वदुसरीरेघ यांचे का० चौ० बराबर होईल.

१६ कोणत्याही बि० चे पायावर स० चौ० करून त्याचा कोन विंदूतून जाचा बाजू जातील असे दोन स० चौ० केले; तर त्यांची बेरीज पूर्व स० चौ० बराबर होईल.

१७ चौकोनाचे चार बाजूंचे वर्गांची बेरीज त्या चौ० चे कर्णाचे वर्गाचे बेरजेहून कर्णाचे मध्यसांधणारे रेघेचे वर्गाचे चौपटीने अधिक आहे.

१८ कोणत्याही चौ० चे समोरासमोरचे बाजूंचे वर्गांची बेरीज आणित्या बाजूंचे मध्यसांधणारे रेघेचे वर्गाची चौपट मिळून दुसऱ्या दोन बाजू व दोन कर्णरेषा यांचे वर्गांचे बेरजे बराबर आहे.

१९ दोन रेषांची बेरीज व वजा बाकी यांचे वर्गांची बेरीज त्या दोन रेषांचे वर्गांचे दुपटी बराबर आहे.

२० कोणतीही रेघ मध्यप्रमाणाने छेदून, सोळा खंड व तीरेघ स्तं धिली असता, जी रेघ होईल, ती सांध्याचा जागी मध्यप्रमाणाने छे दिली जाईल.

२१ चौ० चे कर्णरेषांचे वर्गांची बेरीज त्या आकृतीचे समोरासमोरचे बाजूंचे मध्यसांधणाऱ्या रेषांचा वर्गांचा बेरजे बराबर आहे.

२२ बि० चे कोणत्याही कोनाचे बरोबर भाग करून त्या रेषा समोरचे बाजूपर्यंत वाढविल्या असता, त्या बाजूचे असमान भाग होतील.

## बृक तिसरें

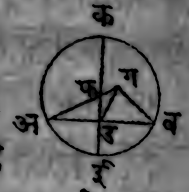
### प्रथमसिद्धान्त.

दिलेल्या वर्तुळाचा मध्यकाढावयाचा.

अबक वर्तुळ आहे, त्याचा मध्यकाढावयाचा.

अब ज्येष्ठेड मध्यस्थकीं लंब करून दोहोंकडे

परिघापर्यंत वाढाव, आणि तो फ स्थकीं दुभाग, ह्मणजे फ बिंदुव  
वर्तुळ मध्य होईल.



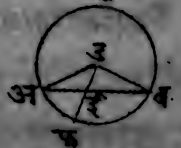
आतां जर तो बिंदु फ स्थकीं नाहीं; तर ग स्थकीं आहे असें मान-  
आणि अग, गड, गब सांध. तेव्हां अगड आणि बगड हे दोन  
△ एकरूप :: उ स्थळावरील कोन बराबर :: (१ बु० ११ सि० प्र०) उ-  
स्थळावरील दोनही कोन का० आहेत. अब वर फड लंब आहे ::  
<फडब का० आहे :: <फडब = <गडब झाला; परंतु तुकडास  
वर्तुळ सांधावर होणें अशक्य :: ग वर्तुळ मध्य नव्हे; तर फ चव  
वर्तुळ मध्य आहे हे सिद्ध.

कु० वर्तुळांत कोणती ही ज्या दुभागून लंब केला असता तो वर्तुळ  
मध्यांतून जाईल.

### दुसरा सिद्धान्त

वर्तुळ परिघांतील कोणतेही दोन बिंदु सांधणारी रेषा वर्तुळांत  
पडते.

अबक ० चे परिघांतील अ आणि ब बिंदु  
सांधणारी रेषा वर्तुळांत पडेल.



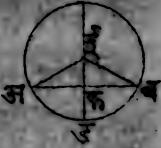
अब रेषेंत कोठेंही ई बिंदु घेऊन, उ ० मध्या पासून ड अडई

दुब रेधा करुत, डई रेघ परिधावर फ पर्यंत वाटीव तेन्हां (१ बु० ५ सि० प्र०) < ब = < अ आणि (१ बु० १६ सि० प्र०) < डईव > < अ अ० < व आहेः (१ बु० १९ सि० प्र०) बड अ० अड > डई आहेः अब रेघ वर्तुळांतच पडते हे सिद्ध.

### तिसरा सिद्धांत. ह० ११

वर्तुळ मध्यांतून जाणारी जी रेघ ज्ये वर लंब असेल, ती ज्ये सदुभागील, आणि दुभागीत असेल, तर तिजवर लंब होईल.

अबक ० त क ई रेघ ई ० मध्यांतून जाऊन, अब ज्ये सफ स्थळीं दुभागतेः ती तिजवर लंब होईल आणि ज्येवर लंब असेल तर ती सदुभागील.



ई मध्यापासून अई आणि बई रेधा कर. आतां अफई आणि बफई हे दोन समबाजू आहेतः (१ बु० ८ सि० प्र०) फ स्थळवरील दोनही कोन बराबरः (१ बु० ११ सि० प्र०) फई, अब वर लंब आहे हे सिद्ध.

पुनः फई, अब वर लंब आहेः ती अब सदुभागील. अई फ आणि बई फ या दोन त्रिकोणांमध्ये < अ = < ब, < अफई = < बफई आणि अई = बईः (१ बु० २६ सि० प्र०) हे दोन एकरूपः अफ = बफ हे सिद्ध.

### चवथा सिद्धांत.

व्यासाशिवाय कोणत्याही दोन ज्या परस्परांस दुभागीत नाहींत.

अबकड ० त व्यासाशिवाय कोणत्याही दोन ज्या अक, बड या परस्परांस दुभागीत






नाहीत.

दुभागितात असें मानल्यास फ ० मध्यव ई छेदन बिंदु सांध.  
फ ई रेघेनें दोनही ज्यांस दुभागिलें, :: (३बु० ३सि० म०) ती दोन  
ही ज्यांवर लंब आहे, :: <अईफ = <बईफ झाला; परंतु तुक  
डा सर्ववस्तू बराबर होतो हें होणें अशक्य. तेव्हां त्या दोन ज्या प  
रस्परांस दुभागीत नाहीत. हें सिद्ध.

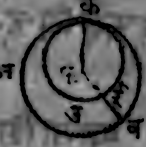
### पांचवासिद्धांत.

परस्पर छेदणाऱ्या वर्तुळांचा मध्य बिंदु एक नसतो.

अबक आणि कडब हीं दोन वर्तुळें परस्पर  
छेदितात तर, त्यांचा मध्य बिंदु एक नाही.   
आतां एक आहे, असें मानिल्यास, ई आहे, अ  
सें मान. क ई सांध. ई फ ग एक रेघ कर. तेव्हां ई क = ई फ आ-  
णि ई क = ई ग :: ई फ = ई ग परंतु तुकडा सर्ववस्तू बराबर हो  
तो हें होणें परम अशक्य :: या दोन ० चा मध्य बिंदु एक नाही हें  
सिद्ध.

### सहावासिद्धांत.


एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून स्पर्शकरीत असल्यास त्या  
दोन वर्तुळांचा मध्य बिंदु एक नसतो.

अबक ० सड ई क ० आंतून स्पर्शकरीत अस   
त्यास त्यांचा मध्य बिंदु एक नाही.  
परंतु याचा मध्य बिंदु एक असून, तो फ आहे असें मान. फ क  
सांध आणि फ ई ब रेघ कर. तर फ क = फ ई आणि फ ब = फ क  
:: फ ई = फ ब; परंतु हें होणें परम अशक्य :: त्याचा मध्य एकना

हीं. हेंसिद्ध.

## सातवासिद्धान्त.

वर्तुळाचे व्यासांत मध्याशिवाय एक बिंदु घेऊन त्या पासून परिघपर्यंत रेखा कराव्या त्या व्यासाचा लहान भागापासून व्यासाचा मोठ्या भागापर्यंत अनुक्रमे मोठ मोठ्या होत जातील. आणि त्या बिंदूपासून व्यासाचा दोहोंकडे दोन अशा मात्र बराबर रेखा करितां येतील.

अबकगड एक ० आहे, त्याचा अड व्यासांतील 
  
ई मध्याशिवाय फ बिंदूपासून फग, फक, फबड, ग, ड, ह रेखाकें त्या तर फग > फड आणि फक > फग या प्र. होतील. ई० मध्यापासून ईब, ईक, ईग अशा रेखाकर. आतां बफई या  $\Delta$  त (१ बु० २० सि० प्र०) (बई + ईफ) > बफ आहे; परंतु बई = अई आहे. अफ > बफ आहे. बईफ आणि कईफ या दोन  $\Delta$  त बई = कई, फई दोहोंस साधारण, < बईफ > < कईफ आहे; तेव्हां (१ बु० २१ सि० प्र०) बफ > कफ आहे. आतां गईफ  $\Delta$  त गफ + फई > गई आहे. गई = ईड, फई साधारण वजा आतां गफ > डफ आहे. हेंसिद्ध.

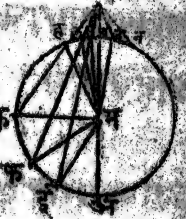
आतां ई बिंदूपासून < गईफ बराबर कोन करणारी ईह रेखा कर. आणि फह सांध; तेव्हां गईफ आणि हईफ या दोन  $\Delta$  त ईग = ईह आणि ईफ साधारण < गईफ = < हईफ आहे; तेव्हां (१ बु० २१ सि० प्र०) हे दोन  $\Delta$  एकरूपः. गफ = फह आहे, परंतु दुसरी केली असतां वरील सि० प्र० > किंवा < होईल. हेंसिद्ध.

इ.

## आठवासिद्धान्त

वर्तुबाचे बाहेरील बिंदू पासून वर्तुळास जा छेदन रेखा करिता येतात, त्यांतून जी मध्य बिंदूंतून जाये, तिज पेशां स्पर्श रेषेकडे अनुक्रमे लहान लहान होत जातील. आणि त्या छेदन रेखांचे वर्तुळाबाहेरील खंड, मध्य बिंदूंतून जाणारे रेषेचे खंडा पेशां अनुक्रमे मोठमोठे होत जातील.

अबक ० चे बाहेर ड बिंदु आहे, त्यापासून मडअ, डई, डफ, डक रेखा केल्या, तर ० म क ध्यांतून जाणाऱ्या डअ रेषे पेशां डई, डफ, डक या अनुक्रमे लहान होत जातील. आणि डग पेशां डस, डल, डह हे अनुक्रमे मोठमोठे होत जातील.



म ० मध्या पासून मई, मफ, मक, मह, मल, मस रेखा करुं डमई या  $\Delta$  त (१ बु २० सि ३०) (मड + मई) > डई आहे मड + मई = अड :: अड > डई आहे डमफ आणि डमई या दोन  $\Delta$  त (१ बु २४ सि ३०) डई > डफ आहे याप्रमाणे डफ > डक आहे. आतां डसम या  $\Delta$  त (१ बु २० सि ३०) (मस + डस) > मड आहे. मलड आणि मसड या दोन  $\Delta$  त (१ बु २१ सि ३०) डस > डग आहे तसेंच डह > डल आहे हे सिद्ध.

## नववासिद्धान्त ह ५२

जा एक बिंदू पासून वर्तुळांत दोहों पेशां अधिक बराबर रेखा करितां येतात, तो बिंदु वर्तुळाचा मध्य होईल.

अबक ० तील ड बिंदू पासून डअ, डब, डक पार रेखा केल्या त्या बराबर असतील, तर ड बिंदु ० चा





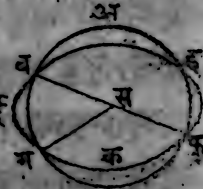
मध्य होईल.

आतां ड० मध्यनस त्यास ई आहे, असें मानून, ड ई सां धून,  
तीरे घ दोहों कडे परिघा पर्यंत वाढविली, तर फ ग हा व्यास  
आहे, आणि त्यां तील ई या ० मध्याशिवाय ड बिंदू पासून  
ड अ, ड ब, ड क या रेखाके त्या, तर त्या (३ बु० ७ सि० प्र०) बराब  
र होणार नाहीत; परंतु त्या बराबर आहेत; ∴ ड हाच ० मध्य  
आहे. हे सिद्ध.

### ददावा सिद्धांत.

कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाचे परिघास दोहों  
पक्षां अधिक ठिकाणी छेदीत नाही.

दोहों पक्षां अधिक ठिकाणी छेदिने, असें मा  
निल्यास फ अ ब ० स ड ई क ० दोहो पक्षां अ  
धिक ब, ग, फ या ठिकाणी छेदिने, असें मान.

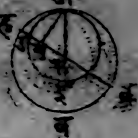


अबक ० चा समध्य बिंदू पासून स ग, स ब, स फ विज्याक  
र (३ बु० ९ सि० प्र०) स बिंदू ड ई फ ० चा मध्य आहे, परंतु (३ बु०  
५ सि० प्र०) परस्पर छेदणाऱ्या ० चा मध्य बिंदू एक असत नाही.  
∴ या दोनही ० चा मध्य एक नाही. ∴ दोहो पक्षा अधिक स्थळीं  
छेदीत नाही. हे सिद्ध.

### अकरावा सिद्धांत. ह० ५३

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आतून स्पर्श करील, तर त्यांचे मध्य  
सांधणारी रेखा वाढविली असता ती स्पर्श बिंदूतून जाईल.

अबक ० स अ ड ई ० आतून अ स्थळीं स्पर्श क  
रील तर त्यांचे फ आणि ग हे मध्य बिंदू सांधिलेले





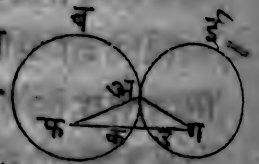
सतांतीरेघस्पर्श बिंदूंतून जाईल.

आतां स्पर्श बिंदूंतून जात नाही, तर ड आणि ह बिंदु छेदून गेली, असें मानून, अग, गफ सांध. (१ बु० २० सि० प्र०) अगफ  $\Delta$  त (अग + गफ) > अफ आहे; यांतून गफ साधारण वजा करितां गअ > गह आहे; परंतु ग ० मध्य आहे : गह चा तुकडा गड, अग चे बरा बरा होतो, हे होणें अशक्य. तेव्हां फग रेघ स्पर्श बिंदूंतूनच जाईल. हे सिद्ध.

### बारावासिद्धांत. ह० ४४

बाहेरून स्पर्शणाच्या वर्तुळांचे मध्यसांधले, तर तीरेघ स्पर्श बिंदूंतून जाईल.

अबक आणि अडई हीं दोन ० बाहेरून अस्यबीं स्पर्शितात, तर त्यांचे फ आणि ग मध्यबिंदु सांधणारी रेघ अ बिंदूंतून जाईल.



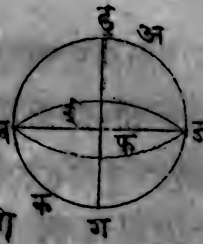
जर स्पर्श बिंदूंतून जात नाही, तर क आणि ड या परिघ बिंदूंतून जाते असें मान. नंतर फअ, अग सांध फ आणि ग ० मध्य आहेत : अफ + अग = कफ + गड आहे आणि फग (कफ + गड) आतां अफग  $\Delta$  त (१ बु० २० सि० प्र०) (अफ + अग) > फग आहे; परंतु हे होणें अशक्य : फ आणि ग बिंदु सांधणारी रेघ अ स्पर्श बिंदूंतूनच जाईल. हे सिद्ध.

### तेरावासिद्धांत.

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून अथवा बाहेरून एका पेक्षा अधिक बिंदूस्थळीं स्पर्श करीत नाही.

अधिक ठिकाणीं स्पर्श करतें, असें मानिल्यास ईवफ ०

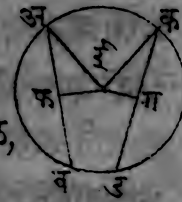
अब क० सब आणि ड या दोन बिंदू स्थळीं  
स्पर्श करितें असें माने. ब, ड हीं स्थळें सांधून  
त्यारे घेस दुभागून, त्या स्थळीं लंब कर बड  
रेघ (१ बु० ३ सि० प्र०) दोन ही ० त पडते आणि  
बड दुभागून हग लंब केला आहे; तेव्हां त्यांत (१ बु० १ सि० प्र०)  
दोन ही ० चे मध्य आहेत. परंतु (१ बु० ११ सि० प्र०) हग लंब स्पर्श  
बिंदूंतून जावा, तो एथें जात नाहीं. दोन ० एका हून अधिक  
ठिकाणीं स्पर्श करीत नाहीं हे सिद्ध.



### चवदावा सिद्धान्त. ह० ४५

कोणत्याही वर्तुळांत जा ज्या परस्पर बराबर आहेत, त्या वर्तुळ  
मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत; आणि जा ज्या वर्तुळ म-  
ध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत, त्या परस्पर बराबर आहेत.

अब क० त अ ब आणि क ड या दोन ज्या  
बराबर आहेत, तर त्या ई ० मध्यापासून बराबर  
अंतरानें होतील. अ० बराबर अंतरानें असतील,  
तर अब = कड होईल.



आतां ई ० मध्यापासून अब, कड ज्यावर ई फ, ई ग लंब क  
र. अई, कई सांध. (१ बु० ३ सि० प्र०) अफ = बफ (१ बु० ४० सि०  
प्र०) अफ ई आणि ई ग क हे दोन एकरूप. फई = गई.

याचे उलट अफ ई आणि ई ग क या दोन का० त फई =  
गई आहे. (१ बु० ४० सि० प्र०) अफ = कग. (६ प्र० प्र०) अड  
= कड हे सिद्ध.

### पंधरावा सिद्धान्त.

व्याससर्वज्या मध्ये मोठा असतो. आणि जी ज्या वर्तुळ मध्या  
चे जवळ असते, ती जी लांब असते, तिज पेशां मोठी असते.

अबकड० चा अड व्यास आहे त्याचे जवळ  
ची ज्या बक आणि दूरची फग आहे; तर अड  
बक आणि बक > फग होईल.



आतां ई० मध्यापासून ई, फ ईग ईब हे बिंदु सांध. आणि म  
ध्यापासून दोन ज्यांवर ईस, ईह लंब कर. (१ बु० २० सि० प्र०) (बई  
+ कई) अ० अड > बक आहे. आतां फसई आणि ईह ब  
या दोन का० त बई = फई, सई ईह गृहित आहे. (१ बु०  
४७ सि० प्र०) बह > फस आहे; तेव्हां बक > फग आहे. हे सिद्ध.

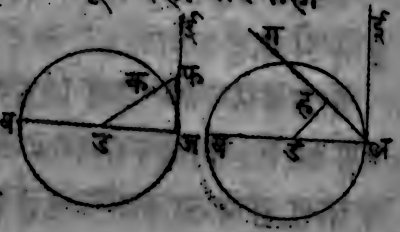
याचे उलट बक ज्या > फग ज्या आहे; तेव्हां ती ० मध्यापा-  
सून जवळ होईल. पूर्वी म० कृत्य कर. बक > फग आहे. बह  
फस आहे. (१ बु० ४७ सि० चे आधाराने) ईह < सई आहे हे-  
सिद्ध.

### सोळावा सिद्धांत.

व्यासाचे दोन्ही बाजू लंब केला असता, तो वर्तुळाचे बाहेर प  
डतो; व त्याचे रीज दुसरी रेघ परिघ आणि तो लंब यांचा म  
ध्ये काढिली तर, वर्तुळास छेदिल्याचा नुन रहाणार नाही.

अबक० चा व्यास अब-

आणि मध्य ड आहे; तर अब  
व्यासाचे अशे वयावर अईल  
बकेला असता, तो ० चे बाहेर



पडेल. आणि तो लंब व व्यास यांचा मध्ये व्यासाचे अशे वया

सूनरेष कादिली असतां ० स छेदील.

कारण अई लंबांत कोठें ही एक फ बिंदु घेऊन फड सांघ. (१ बु. ३२ सि. प्र.) <अ> <अ फ ड आहे. (१ बु. १९ सि. प्र.) अड विज्ये हून ड फ बाजू मोगी आहे; तेसां फ बिंदु ० बाहेर आहे. अई रेघ वर्तुबाचे बाहेर आहे हें सिद्ध.

पुनः अई लंब आणि अवक ० यांमध्ये अव व्यासाचे अ टोंका पासून अग रेघ कादिली ती ० स छेदील.

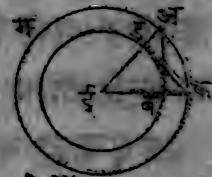
अ टोंका पासून का. हून लहान कोन करणारी अग रेघ कर. आणि तिजवर ० मध्या पासून ड ह लंब कर. अड ह का.  $\Delta$  त (१ बु. ३२ सि. प्र.) <ड ह अ> <अड ह आहे. (१ बु. १९ सि. प्र.) अ—ड—ह आहे. ह बिंदु ० न आहे. अग रेघ ० स छेदिते हें सिद्ध.

कु. जी रेघ विज्येचे बाहेरील शेवटावर लंब आहे, ती त्या वर्तुबास स्पर्श रेघ आहे.

### सत्रावासिद्धांत.

वर्तुळ परिघाचा बाहेरील बिंदू पासून वर्तुबास स्पर्श रेघ कर रावयाची.

वकड ० स अ बिंदू पासून स्पर्श रेघ करावयाची.



ई ० मध्य आणि अ बिंदु सांधून ई अ विज्येनें अ फ ग ० कर, आणि अई रेघेवर ड स्वकीं ड फ लंब करत ई फ अ, व सांघ. ई व अ आणि ड ई फ या दोन  $\Delta$  त अई = ई फ, डई = ड व आणि <ई साधारण. (१ बु. ४ सि. प्र.) हे दोन  $\Delta$  एकत्र

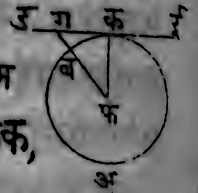


∴ <ड = <ब; परंतु <ड का० आहे ∴ <ब का० आहे ∴ (१३ बु० १६ सि० प्र०) अब स्पर्शरेष आहे. हैं सिद्ध.

### अठरावासिद्धांत. ह० ४७

स्पर्शरेषेवर स्पर्शस्थळ आणि मध्य बिंदु सांधणारी रेषा लंब आहे.

अबक० सडकई स्पर्शरेष आहे, तर फ मध्य बिंदु आणि क स्पर्शस्थळ सांधिलें असतां, फक, डई वर लंब होईल.

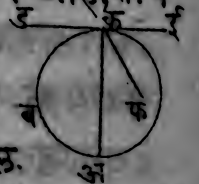


आतां फक लंब नाही असें मानित्यास, फग लंब आहे असें मान. फगक चाका०  $\triangle$  त <ग> <क आहे ∴ (१३ बु० १९ सि० प्र०) कफ> फग आहे; परंतु फग चातुकडा फब = फक आहे. आणि सर्व फग < फक आहे. हे होंगें परम अशक्य ∴ फक च लंब आहे. हैं सिद्ध.

### एकुणिसावासिद्धांत. ह० ४७ चीकु०

जी रेषा वर्तुळाचे स्पर्शरेषेवर स्पर्शस्थळीं लंब आहे, ती वर्तुळ मध्यांतून जाते.

अबक० त क स्पर्शस्थळीं डई स्पर्शरेषेवर अक लंब आहे; तर ती० मध्यांतून जाईल.



जर मध्य बिंदु अक रेघेत नाही, तर बाहेर कोठें ही फस्थळी आहे असें मानून, फक सांध. (१३ बु० १९ सि० प्र०) डई वर फक लंब आहे ∴ <फकई का० आहे; परंतु (प्रतिज्ञेत सांगि० प्र०) <अकई का० आहे ∴ <अकई = <फकई यांत तुकडा सर्व वस्तू बराबर होती, हे अशक्य ∴ मध्य बिंदु अक रेघेचे बाहेर-

हैं सिद्धः

कु० वर्तुळ मध्या पासून स्वर्गारे घेवर लंब केला असतां स्वर्गा बिंदू तून जातो.

### विसावासिद्धांत.

ह० ५१

एका वर्तुळांत मध्यकोन आणि परिधकोन एका कोंसावर असतील, तर मध्यकोन परिधकोनाचे दुप्पट आणि परिधकोन मध्यकोनाचे अर्धविरावर होईल.

अबक० त अ परिधकोन आणि ड

मध्यकोन हे एकाच बक कोंसावर आहेत.

तर  $\angle ड = २ \angle अ$  अ० ३१  $\angle ड = २ \angle अ$  होईल.



आतां अ, ड बिंदु सांधून, ती रेघ परिधा पर्यंत वाढाय, तर-

(१ बु० ५ आणि ३२ सि० प्र०)  $२ \angle ब अ ड = \angle ब ड ई$  तसेंच  $\angle क अ ड$

$= \angle क ड ई$  ∴ (२ प्र० प्र०)  $२ \angle अ = \angle ड$  हैं सिद्ध.

### एक विसावासिद्धांत.

ह० ५०

जेकोन एका वर्तुळ खंडांत असतात, ते परस्पर बराबर असतात.

अबकडई० चा व अईड

खंडांत अ आणि ई कोन आ

हेत, ते परस्पर बराबर आहेत.



आतां त्याच खंडांत फ मध्यकोन कर. (३ बु० २० सि० प्र०)  $\angle फ$

$= २ \angle अ$  आणि  $\angle फ = २ \angle ई$  ∴ (७ प्र० प्र०)  $\angle अ = \angle ई$  हैं सिद्ध.

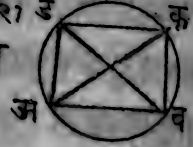
### बे विसावासिद्धांत.

ह० ५४

वर्तुळांतील चोकोनाचे समोरा समोरचे दोन कोनांची बेरीज

दोन काटकोना बराबर आहे.

अबकड० त अबकड चौकोन के लें आहे, उ  
तर त्याचे समोरासमोरचे <अ + <क अ० <ब  
+ <ड = २का० होतील.



अ, क, ब, ड बिंदु सांध. (३बु० २१ सि० प्र०) <अडब = <अकब त  
सेंच <कडब = <कअब :: <अडक = <बअक + <अकब या  
बरोबरीत <अबक मिळीव; तर <अडक + <अबक = <कअब  
+ <अकब + <अबक (१बु० ३२ सि० प्र०) या बरोबरीचे तीन कोनां  
ची बेरीज २का० :: <अडक + <अबक = २का० तसेंच <बअड  
+ <बकड = २का० हे सिद्ध.

### तेविसावासिद्दांत.

एकारेघे वरतिचे एकाच अंगास वर्तुळाचे दोन सजातीय खंड  
डकदापि निराळे रहावयाचे नाहीत.

रहातील असें मानित्यास अबड० खंडा  
चे आंत अकब खंड पडेल असें मान.

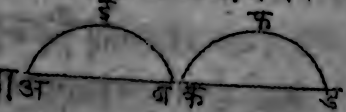


आतां अबकड रेघ काढून अड अक सांध. (४९ व्या० प्र०)  
<ड = <क, परंतु (१बु० १६ सि० प्र०) <क < ड आहे; तर एक  
वेळ बराबर आणि एक वेळ मोठा हें अशक्य :: ते खंड निराळे  
रहावयाचे नाहीत हे सिद्ध.

### चविसावासिद्दांत.

वर्तुळाचे सजातीय खंड समान रेघावर असतात, ते पर-  
स्पर बराबर असतात.

अईव आणि कड हे दोन सजा  
तीय खंड अब आणि कड या दोन समान रेघांवर अस



लते परस्पर बराबर होतील.

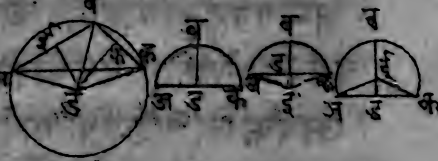
आतां अबई आकृति कडफ आकृतीवर ठेविली, तर (३बु. २३सि.प्र०) या एकत्र मिळतील. हे दोनही खंड बराबर आहेत हे सिद्ध.

### पंचविंशतिवासासिद्धांत.

दिलेल्या वर्तुळा खंडापासून त्याच वर्तुळा काढावयाचा.

अबक ○ खंडाचें ○ काढ.

आतां परिघांतील कोणत्याही बबिंदूपासून बअ, बक या दोन



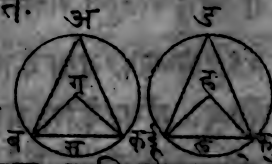
ज्या करून, त्या दुभागून, दुभागस्थळी लंब कर. ते लंबजास्थळी परस्परांस छेदितील तो ड बिंदु ○ मध्य होय.

अ, ड ब, ड क, ड सांध. (३बु. १८सि.प्र०) अड = बड आणि बड = कड. (१प्र.प्र०) अड = बड = कड. (३बु. १९सि.प्र०) ड हा त्या ○ चा मध्य आहे हे सिद्ध.

### सविंशतिवासासिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान कोन समान कोन सांवर असतात. ते परिघकोन असोत, अथवा मध्यकोन असोत.

अबक आणि डईफ या दोन ○ त ग मध्यकोन = ह मध्यकोन, आणि अ प



रिघकोन = ड परिघकोन आहेत; तर बसक आणि डईफ हे कोन सवराबर होतील.

ब, क ई, फ सांध. बग, गफ आणि ईह, हफ या समान ○ चा त्रिज्या. परस्पर बराबर आहेत. गबक आणि हईफ हे दोन



(१ बु० ४ सि० प्र०) एकरूप आहेतः बक = ईफ आहे. अ परि  
घकोन ड परिघकोन बराबर आहेः (४९ व्या० प्र०) बअक आ  
णि ईलफ ० संड सजातीय आणि समान रेखांवर आहेतः  
(३ बु० २४ सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेतः बसक आणि ई  
लफ हे कौंस बराबर आहेत हे सिद्ध.

### सत्ताविसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान कौंसांवर जे कोन असतात, ते परस्पर  
बराबर असतात. ते मध्यकोन असोत अ. परिघकोन असोत.

अबक आणि डईफ या दोन समान



० त ग, ह हे दोन मध्यकोन, आणि अ, ब  
फ हे दोन परिघकोन बसक आणि  
ईलफ या दोन समान कौंसावर आहेत; तर  $\angle अ = \angle ड$  आणि  
 $\angle ग = \angle ह$  होतील.

आतां  $\angle ग = \angle ह$  असेल, तर (३ बु० २० सि० प्र०)  $\angle अ = \angle ड$  होई  
ल; परंतु  $\angle ग = \angle ह$  नसेल, तर कोणता तरी एक मोग आहे,  
एथें  $\angle ग$  मोठा आहे असे मान, आणि  $\angle ह$  बसबरोबर कोन करणारी  
ग बिंदू पासून गस रेघ कर. तर  $\angle ह = \angle बगस$  आहेः (३ बु०  
२६ सि० प्र०) बस कौंस = ईलफ कौंस; परंतु (प्रतिज्ञे प्र०) बक  
कौंस = ईफ कौंस आहेः (१ प्र० प्र०) बस कौंस = बक कौंस ते  
ह्या लहान कौंस मोठे कौंसा बराबर होणें अशक्यः  $\angle ग = \angle ह$   
आणि  $\angle अ = \angle ड$  हे सिद्ध.

### अष्टाविसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान ज्या समान कौंस करितात, महत्तर कौंस

समहत्तर कौंसा बराबर होतो, आणि लघुतर कौंसा लघुतर कौंसा बरोबर होतो.

अबक आणि डईफ ही दोन समान  आणि  या दोन समान नज्या आहेत, तर बगक कौंस = ईहफ कौंस आणि बअक कौंस = ईडफ कौंस आहे.

स आणि ल० मध्यां पासून सब, सक आणि लईलफ यांनी ज्या कर. बसक आणि ईलफ हे दोन (१ बु० ८ सि० प्र०) एक रूपः  $\angle स = \angle ल$  ते ह्या (२ बु० ६ सि० प्र०) बगक कौंस = ईहफ कौंस हे सिद्ध.

### एकूण तिसावा सिद्धांत

समान वर्तुळांत समान कौंसांचा ज्या समान असतात.


मागील आकृतीवर दृष्टि ठेव.

बसक आणि ईलफ या दोन  $\Delta$  त एकाचा बस, कस बाजू दुसऱ्याचा ईल, ईफ बाजूचे बराबर व (२ बु० २० सि० प्र०)  $\angle स = \angle ल$  हे दोन (१ बु० ८ सि० प्र०) एक रूपः फक ज्या = ईफ ज्या हे सि.

### तिसावा सिद्धांत.

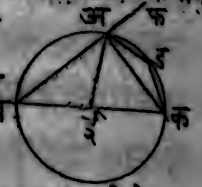
दिलेला कौंस दुभागावयाचा.

अडब कौंसाचे दोन समान भाग करावयाचे.

त्या कौंसाचीं अ आणि ब दोन रों कें सांधून ती रेघ दुज  भागून, दुभाग स्वकीं कडलं बकर आणि अड, बड सांधअ कड आणि बकड हे दोन (१ बु० ८ सि० प्र०) एक रूपः अड = बड आहे. (२ बु० २० सि० प्र०) अड कौंस = बड कौंस हे सिद्ध.

## एकतिसावासिद्धान्त.

अर्धवर्तुळांतील कोन का० असतात; अर्धवर्तुळापेक्षांमोठेसं  
डांतील लघु असतात, आणि लहान खंडांतील विशाल असतात.  
अबक एक ७ जांत बक व्यास त्याचे दोन  
समान भाग करीत आहे, आणि अक रेघ त्या  
चे दोन विषम भाग करीत आहे ब, अ अ, ड  
क, ड बिंदु सांध. तर अर्धवर्तुळांतील < बअक का०, मोठे खं-  
डांतील < ब लघु आणि लहान खंडांतील < ड विशाल होईल.



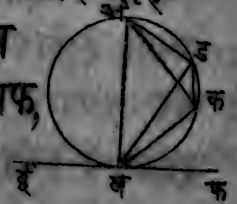
अई सांधून अब, फ पर्यंत वाढीव, तर बई = अई :: (१ बु०  
५ सि० प्र०) < ब = < बअई तसेंच अई = ईक :: < अकई =  
< ईअक :: < बअक = < ब + < अकब (१ बु० ३२ सि० प्र०) < ब +  
< अकब = < फअक (१ प्र० प्र०) < बअक = < फअक.  
(११ व्या० प्र०) < बअक का० आहे. आतां अबक त्रिभुज < बअक  
का० आहे :: < ब लघु आहे.

आतां अबक ड ७ त अबक ड चौवाजू आहे, तेव्हां (२ बु० २२  
सि० प्र०) < ब + < अडफ = २ का० परंतु < ब लघु आहे :: < ड वि-  
शाल आहे. हें सिद्ध.

## वर्तुळाचा वासिद्धान्त. ह० ५३

वर्तुळाची स्पर्शरेषा आणि स्पर्शस्थळा पासून केलेली ज्या यां पा-  
सून जो कोन होतो तो व्युत्क्रम खंडांतील कोना बराबर आहे.

अबक ७ सईफ स्पर्शरेषा आहे, आणि ब  
स्पर्शस्थळा पासून बक ज्या केलेली, तर < कबफ,  
व्युत्क्रम खंडांतील < ड बराबर होईल.

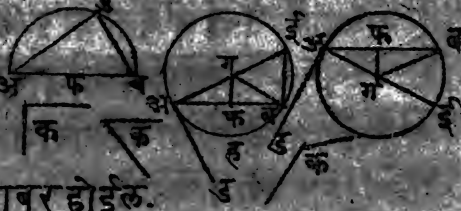




ईफ वरबस्थकीं अब लंब करून परिधा पर्यंत वादीव. तो  
 लंब (३ बु. १९ सि. प्र.) व्यास आहे. अक सांध. (३ बु. ३१ सि.  
 प्र.) <अक ब का. आहे. (१ बु. ३२ सि. प्र.) <अब क +  
 <ब अक = १ का. आणि ईफ वर अब लंब आहे. <अब क  
 = १ का. यांत साधारण <अब क आहे, तो कजा करून <अ =  
 <क ब फ परंतु (३ बु. २२ सि. प्र.) <अ = <ड तेव्हां <क ब फ =  
 <क ड ब हे सिद्ध.

### तेनिसावासिद्धान्त.

जांतील कोन दिल्या कोना बराबर होईल, असा एक वर्तुळ खं  
 ड दिले रेघेवर करावयाचा. अब रेघेवर असा एक अ  
 खंड करावयाचा की, जां  
 तील कोन दिलेक कोना बराबर होईल.




अब रेषेतील अविंदू पासून <क बराबर कोन करणारी अड  
 रेघ करून, तिचेवर अ स्थळीं अई लंब कर, आणि अब, क स्थ  
 ळीं दुभागून, फ ग लंब कर. तो लंब ग स्थळीं अ ग रेघेस मिळेल,  
 नंतर ब ग सांध. अ ग क आणि ब ग फ हे दोन (१ बु. ४ सि.  
 प्र.) एकरूप. अ ग = ब ग आहे. अ ग बिज्येने अई ब ह ०  
 केले, तर ते ब विंदूतून जाईल. अ ग, परिधावर ई पर्यंत वाढवून,  
 ब, ई सांध. (३ बु. १६ सि. प्र.) अड त्या ० स स्पर्शरेष आहे. (३ बु.  
 ३१ सि. प्र.) <ई = <ब अ ड, परंतु कृत्याने <ब अ ड = <क ओ  
 हे. (१ प्र. प्र.) <ई = <क आहे, तेव्हां अब रेघेवर अई ब हा  
 ० खंड झाला. हे सिद्ध.



चवतिसावासिद्धान्तः

दिले त्या बत्तीचा असा एक खंड पाड कीं, जांतील कोन दिले-  
त्या कोना बराबर होईल.

अबक ० चा असा एक खंड पाइकीं, जां  $\Delta$  

दिलेल्या ० सईफ स्पर्शरेषा करून, तिशीं स्पर्श बिंदू स्थळीं ८ड  
तरावर कोन करणारी बक ज्याकर, आणि व्युत्क्रम स्वंडांत परि  
घावर एक बिंदु येऊन, अथ आ, क सांध; तर (३ बु. ३३ (सि. प्र.)  
८फ बक = ८अ आणि ८फ बक = ८ड आहे. (१ प्र. म०) ८ड  
= ८अ आहे; तेव्हां बहक हा इच्छित ० स्वंड आहे. हे सिद्ध.

पस्ति सावा सिद्धांत. ॥ ६९

वर्तुळान्त जा दोन रेखा परस्परांस छेदितात, त्यांचे खंडांचे का.  
दो. परस्पर बराबर आहेत.

अवकडः ० त  
अक आणि वड  
या दोन ज्या पर

स्वरांसं छेदितात, तर अई-ईक = बई-ईड होईल.

आतांफ ० मध्या पासून बफ, फक, अफ, फड रेघाकर, आ  
णिफ, ई सांधः (३ बु. ड सि. म०) अफ-ईफ-आई. ईक आ  
णि बफ अ० अफ-ईफ-बई. ईड :: (१ म० म०) आई. ईक-  
बई. ईड हे सिद्ध

छत्तिसावासिद्धांत. ह०६१ कु०१

कीणत्याही वर्तुळास एकाचिंद्रंतून एकस्पर्शरेषा एक छेदन

रेष केली तर, ती छेदनरेष आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील खंड यांचा का.चौ, स्पर्शरेषेचा वर्गाबरोबर आहे.

अबक एक ० आहे, त्यास ड बिंदू पासून बड स्पर्शरेषेचे अड छेदनरेषे केली तर बड = अड-कड होईल.



ड बिंदू पासून डईस व्यास करून, ई मध्यापासून फई, अड वरलंब कर आणि कई बई सांध. (३ बु. १० सि. प्र.)  
 (बका आहे. (१ बु. १० सि. प्र.) डई = बड + बई (२ बु. ५ सि. प्र.) डफ = अड-कड + कफ यांत फई मिळवून, डफ + ईफ = अड-कड + कफ + फई यांत (१ बु. १० सि. प्र.) किंमत लिहून, डई = अड-कड + कई अ. बई, डई चा दोनही किंमती बराबर करून, बड + बई = अड-कड + बई स्थ.क. बड = अड-कड हे सिद्ध.

कु. वर्तुळास एका बिंदू पासून दोन छेदनरेषा केल्या असता एकीचे अवयवांचा का.चौ. दुसरीचे अवयवांचे का.चौ. बराबर आहे.

### सततिसावा सिद्धांत.

वर्तुळाबाहेरील एका बिंदू पासून वर्तुळास मिळेल्या एकरेषेचे ली आणि एक छेदनरेषे केली, जर छेदन रेखा व तिचा वर्तुळाबाहेरील भाग यांचा का.चौ. बराबर त्या मिळणाऱ्या रेषेचा वर्ग असेल तर, ती त्या वर्तुळास स्पर्शरेष होईल.

अबकई ० बाहेरील ड बिंदू पासून ० समि छेपयति बड रेषे केली, आणि अक छेदनरेष



केली; अशी की; बडै = अड-कड होईल, तर बड त्या ० सस्पर्श रेघ होईल.

अबकई ० सड बिंदू पासून दुसरे बाजू सडई स्पर्श रेघ कर. आणि फ ० मध्यापासून फड, फड, फड सांध. (३ बु. १८ सि. म०) <ड का० आहे आणि (३ बु. ३६ सि. म०) डई = अड-कड आहे. व बड = अड-कड ग्रहित आहे. बड = डई आहे. व फड आणि फईड या दोन त (१ बु. १८ सि. म०) <ई = <ब आहे; परंतु <ई का० आहे. <ब का० आहे. (३ बु. १६ सि. म०) बड रेघ-अबक वर्तुळाची स्पर्श रेघ आहे हे सिद्ध.

कु० एका बिंदू पासून वर्तुळास दोन स्पर्श रेखा केल्या, तर त्या परस्पर बराबर आहेत.

### तिसऱ्या बुकाचे प्रश्न.

१ जी रेघ वर्तुळ मध्यातून जाऊन, कोणत्याही ज्येस लंबाने दुभागिते; ती तिशींस असणाऱ्या दुसऱ्या ज्येसही लंबाने दुभागीत.

२ परस्पर छेदणाऱ्या वर्तुळांचे मध्यसांधणारी व छेदन बिंदु सांधणारी या रेखा परस्परांस लंबाने दुभागितात.

३ परस्पर छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांचे एका छेदन बिंदू पासून दोन वर्तुळांत व्यास केले, आणि त्यांची शेवटें सांधिली; तर त्या रेघेंत दुसरा छेदन बिंदू येईल.

४ वर्तुळांत दोन स. ज्यांस दुभागणारी रेखा जबर लंब असते.

५ दोन समकेंद्र वर्तुळांस छेदणाऱ्या रेघेचे सावर्तुळा मध्ये जे दोन लंड पडतात ते, परस्पर बराबर आहेत.

६ वर्तुळ मध्यातून जाणें, ज्येस दुभागणें, ती परलंब दोणें मध्य



कोनासदुभागणें, आणि ज्या कोनास दुभागणें या पांच गुणां तून-  
दोन गुण ज्या रे घेचे अंगी असतात, तिचे अंगी बाकी तीन ही गु-  
ण असतात.

७ एका वर्तुळाचे विज्येवर दुसरे वर्तुळ केलें असतां, त्यांचा स्पर्श बिंदू पासून दुसरे वर्तुळांत एक ज्या केली, तर ती ज्या दुसरे वर्तुळाचे परिघस्थळी दुभागिली जाईल.

८ वर्तुळांतील चौकोनाची एक बाजू बाहेर वाढविली असतां, बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचे कोना बराबर आहे. ८०५१

९ वर्तुळांत दोन ज्या परस्पर स० केल्या असतां, त्यांचे अंतरांतील कोन परस्पर बराबर होतात. - - - - - ८०५२

१० जेव्हां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून स्पर्श करते, अर्थात् न वर्तुळ परस्पर बाहेरून स्पर्श करितात, तेव्हां त्यांचा स्पर्श बिंदू तून जाणाऱ्या रेखा वर्तुळास मिळे पर्यंत वाढवून, त्यांची दोघटे सांधिली असतां, दोघटे सांधणाऱ्या ज्या स० होतात.

११ वर्तुळाची स्पर्शरेखा आणि त्याच वर्तुळातील ज्या या परस्पर स० असतील; तर त्याचे अंतरांतील कोन परस्पर बराबर होतील. - - - - - ८०५३

१२ दोन समकेंद्र वर्तुळांमध्ये मोठे वर्तुळाची ज्यालहान वर्तुळास स्पर्शरेखा आहे, तर ती ज्याला स्पर्श बिंदू स्थळी दुभागिली जाईल.

१३ दिलेल्या वर्तुळास छेदणारी, व दिलेल्या दोन बिंदूंतून जाणाऱ्या अशी कितीही वर्तुळे केलीं; तर त्या वर्तुळांचे छेदन बिंदू सांधणाऱ्या रेखा एका बिंदू स्थळी मिळतील.

१४ दिलेले दोन बिंदूंतून जाऊन, दिलेले वर्तुळास स्पर्श करील,



असं एक वृत्त का दावया वें.

१५ वृत्त का तजा दोन ज्या एक मेकीं वर लंब असून परस्पर सं-  
छेदितात, त्या ज्यांचा चार खंडांचा वर्गांची बेरीज ज्यासाचे वर्गा  
बराबर होते.

१६ वृत्त कांतील व्यासाचा शेवटो पासून जर एकाज्ये वर लंब के-  
ले, तर त्याज्येचे वाढविलेले लंबा पर्यंत खंड बराबर होतात.

१७ शिरकोन, पाया, आणि जुंची हीं दिलीं आहेत, तर त्यां पासून  
त्रिकोण कर.

१८ जर वृत्त कांतील कोणत्याही ज्येशीं स० व्यास करून, त्याज्येचा  
दोनही शेवटो पासून व्यासांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत रेखाके-  
ल्या, तर त्यांचा वर्गांची बेरीज, ज्यासाचा दोन खंडांचा वर्गाचा बे-  
रजे बराबर होईल.

१९ वि० चा शिरकोन, पाया आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज इ-  
तकीं समजलीं असतां, त्यां पासून वि० का दावयाचा.

२० जर एका बिंदू पासून वृत्त का दोन स्पर्श रेखा केल्या, आणि  
त्यांचे स्पर्श बिंदु सांधून, पूर्वीचा बिंदू पासून त्या वृत्त का एक छेद  
न रेख केली, तर त्या छेद न रेखेचे जे तीन खंड पडतात ते, या मग  
जात होताना कीं, ती छेद न रेख समधील खंड यांचा का० चौ० रा-  
हित्या दोन खंडांचा का० चौ० बराबर होतो.

२१ वृत्त कांतील चौ० चा समोरासमोरचा बाजू वाढविल्या असतां,  
त्या जा बिंदूंत मिळतात, त्यांस सांधणाऱ्या रेखेचा वर्ग; त्या बिंदू  
पासून वृत्त का दोन स्पर्श रेखा केल्या असतां, त्यांचा वर्गाचा बे-  
रजे बराबर होतो.

## बुक चवथें.

### प्रथमसिद्धान्तकृत.

वर्तुळांत व्यासा पेशां मोठी नाहीं, अशी दिले रेघे एवढी रेघ करावयाची.

अबक ० त दिलेल्या ड रेघे एवढी रेघ करावयाची.



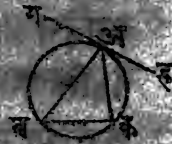
अबक ० चा व्यासाचा बरोबट मध्यमासून, ड त्रिज्येने अ ईफ ० कर, आणि अब सांध आतां ड = बई आणि बई = अब :: (१ प्र० प्र०) ड = अब हे सिद्ध.

### दुसरा सिद्धान्तकृत.

दिलेल्या वर्तुळांत दिलेल्या त्रिकोणाशी समकोन असा एक संल

म त्रिकोण करावयाचा.

अबक ० त संलम ड ईफ ० शी समकोन असा ० करावयाचा.



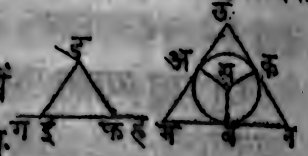
अबक ० सह अग एक स्पर्शरेष करून अ स्पर्शस्थळी अह शी ईकोना बराबर कोन करणारी अ करेघ कर तसेच अग शी फकोना बराबर कोन करणारी अब रेघ कर. बक सांध तर अब क हाइच्छिला बि. झाला कारण (३ बु० ३२ सि० प्र०) <ग अब = <क आहे. <ड अक = <ब :: (१ प्र० प्र०) <क = <फ आणि <ब = <ड आतां ईडफ आणि अबक हे दोन ० (१ बु० ३२ सि० प्र०) समकोन आहेत, तेव्हा अबक ० त डईफ ० शी समकोन आणि संलम असा अबक बि. झाला हे सिद्ध.

## तिसरासिद्धांत. कल

वर्तुळ भोंवती दिलेल्या त्रिकोणाशी समकोन असा एक त्रिकोण करावयाचा.

अबक ० भोंवती संलग्न डईफ  $\Delta$  शी

समकोन असा एक त्रिकोण करावयाचा.



त्रिकोणाची ईफ बाजू दोहोंकडे ग, ह पर्यंत वाढीव, आणि ० त बस एक बिज्या कर, व तिशीं ० मध्यापासून एकीकडे गईड चे बराबर आणि दुसरीकडे डफह चे बराबर कोन करणाऱ्या अस, क सरंघा कर, आणि (१ बु ३० सि. प्र.) अत्र, क या तीन बिंदूंतून लम, मन, नल स्पर्शरेषा कर यां पासून लमन हाइलि लात्रि. झाला.

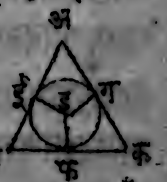
कारण (१ बु १० सि. प्र.) अ, ब, क या स्थळांवरील कोन का० आहेत. (१ बु ३२ सि. प्र.)  $\angle म + \angle असब = २ का०$  आणि (१ बु १३ सि. प्र.)  $\angle डईग + \angle डईफ = २ का०$  आहेत. या दोन बरोबऱ्या तसाधारण  $\angle असब = \angle डईग$  वजा करून, (३ प्र. प्र.)  $\angle म = \angle डईफ$  तसेंच  $\angle न = \angle डफई$ . (१ बु ३२ सि. प्र.) मनल आणि डईफ हे दोन  $\Delta$  समकोन आहेत, तेव्हा दिलेल्या ० भोंवती सांगितले  $\Delta$  शी समकोन लमन  $\Delta$  झाला. हे सिद्ध.

## चवथासिद्धांत. कल. ह. क. २०

त्रिकोणांत त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

अबक  $\Delta$  त त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

$\Delta$  चे ब आणि क कोन बड, कड रेषांनीं दुभाग, व आणि त्याचे ड छेदन बिंदू पासून तीनही बाजूंवर डफ, डई





डग लंबकर बडई आणि वफड हे दोन  $\Delta$  (१ बु. २६ सि. प्र.)  
 एकरूपः डई = डफ तसेंच डफ = डगः (१ प्र. प्र.) डई, डफ  
 डग परस्पर बराबरः डई, डफ, डग यांतून एक विज्या मावून,  
 केलेले  $\odot$  दिके त्या  $\Delta$  शी संलग्न आहे हे उघड आहे.

### पांच वासिद्धान्त. कृत्वा ११

त्रिकोणाचा बाहेर त्याशी संलग्न वर्तुळ करावयाचे.

अबक  $\Delta$  बाहेर त्याशी  
 संलग्न  $\odot$  करावयाचे.



अब, अक दुभागून,

दुभागस्थळी लंबकर. ते फस्थळी परस्परांस छेदितील, त्या-  
 बिंदूपासून फअ, फब, फक रेखा कर. या रेखा त्या  $\odot$  चा विज्या  
 आहेत कारण अडफ, बडफ हे दोन  $\Delta$  (१ बु. २६ सि. प्र.) एकरूपः  
 अफ = बफ तसेंच अफ = कफः (१ प्र. प्र.) अफ,  
 बफ, कफ परस्पर बराबर आहेतः यांतून एक विज्या मावून  
 न  $\odot$  केले असता ते  $\Delta$  शी संलग्न होईल. हे उघड आहे.

कु० त्रिकोणाचा समोरील कोन असतो त्या मध्य बिंदु  $\Delta$  त पडला  
 असतो तीनही कोन लघुकोन असतात. बाजूंत पडला असतो  
 त्या बाजू समोरील कोन का असतो आणि बाहेर पडला असतो  
 जा बाजू बाहेरील अंगास तो मध्य असतो, त्या बाजू समोरील  
 लकोन विशाल असतो. अ. याचे उलट. लघुकोन त्रि. अस-  
 ल्यास मध्य बिंदु त्रि. त पडेल. का. त्रि. असल्यास कर्ण रेघेत पडे-  
 ल आणि विशाल कोन असल्यास मध्य बिंदु विशाल कोनास मो-  
 रचा बाजूचे पलीकडील अंगास पडेल.



## सहावासिदांत.

ह० क० २३

वर्तुळांत त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचे.

अबकड० त त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचे.

अबकड० न अक, बड हे दोन व्यास परस्प

रांवरलंब कर आणि अ, ब, क, ड हे बिंदु सांप. (१ बु०

१ सि० प्र०) अईब, अईड, कईब, कईड हे  $\Delta$  एकरूप आहे

त. अब बक कड ड अ बाभूबराबर आणि (३ बु० ३१ सि०

प्र०) &lt;अ, &lt;ब, &lt;क, &lt;ड हे चारही कोन का० आहेत. अबकड चौरस आहे हे सिद्ध.



## सानवासिदांत.

ह० क० २४

वर्तुळाबाहेर त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचे.

अबकड वर्तुळाबाहेर त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचे.

अक, बड हे दोन व्यास परस्परांवरलंब कर.

आणि अ, ब, क, ड या बिंदू स्थळां० सफग, गह, हस, सफ या

चार स्पर्शरेषा कर. (१ बु० १० सि० प्र०) अ, ब, क, ड बिंदू जवळी

ल कोन का० आहेत व व्यास परस्परांवरलंब आहेत. ई स्थळा

वरील कोन का० आहेत (१ बु० २० सि० प्र०) गह, फस रेषा अक

शीं स० आहेत. व गफ, हस रेषा बड शीं स० आहेत. गह,

फस शीं आणि गफ, हस शीं स० आहेत. (१ बु० ३४ सि०

प्र०) गफ = हस आणि गह = फस आहे अक = बड आहे

॥ गफ, फस, सह, हग या सर्वांवर आहेत. गईस० चो न

&lt;ई का० आहे. &lt;ग का० आहे. याम० गस आकृतीचे चार



हीकोन का० आहेतः अबकड आकृतिचौरस आहे. वरें अबकड  
ड० शी संलग्न आहे. हे सिद्ध.

आठवासिद्धान्त कृत्य ह० कृ० २५

चौरसांत त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

अबकड चौरसांत त्याशीं संलग्न ० करावयाचें.

अब, अड बाजू दुभागून, त्या स्थळीं फस, ई  
ह ठंबकर. ते गस्थळीं परस्परांस छेदितील.



अगईस, फह, गक हीं सर्वचौरसें असून, बराबर आहेत;  
कारण मुळचे चौरसाचा बाजू दुभागून ठंब केले आहेत आतां  
हीं चौरसें बराबर आहेतः फग = ईग = गस = गहः. यारेषां  
तून एकारेघेनें गमध्यकरून केलेले ० चौरसांत त्याशीं संलग्न  
होईल; कारण (१ बु० २९ सि० म०) फ, ई, स, ह या बिंदूजवळचे कोन  
का० आहेतः (२ बु० १६ सि० म०) अब, अड, डक, कब या अनुक्रम  
में स्पर्शरेषा आहेतः चौरसांत इच्छिलें ० झालें. हे सिद्ध.

नववासिद्धान्त कृत्य ह० कृ० २६

चौरसात भोंवती संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

अबकड चौरस आहे, त्याबाहेर संलग्न

० करावयाचें.



अक, बड या दोन कर्ण रेखा कर. त्या ई स्थळीं परस्परांस दु  
भावितात. अई बिज्येनें अबकड ० कर. ते चौरसास भोंवतीं इ  
च्छिलें वर्तुळ होईल.

अकड आणि बकड या दोन ० (१ बु० ४ सि० म०) अक =  
बड आणि (२ बु० बसि० कु० म०) अई = कई आणि बई = डई

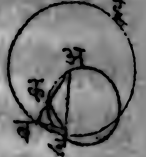
∴ (७प्र०प्र०) अई, बई, कई, डई परस्पर बराबर ∴ त्या अवकड  
○चा विज्या आहेत. हे सिद्ध.

### दहावा सिद्धांत. कृत्य.

ह०क० २०

जाचा पाया कडील प्रत्येक कोन शीर कोनाचे दुप्पट होईल,  
असा एक समदि बाजू त्रिकोण करावयाचा.

अब एकरेष कर. आणि (१बु० ११ सि०प्र०) ति  
ला कस्थकीं अशी छेदकीं, अब बक = अक होईल.



अमध्य करून, अब विज्येनें डई ब० कर. आणि त्यांत अक  
रेषे एवढी व बिंदू पासून बड ज्या कर. अ, ड क, ड सांध आणि  
अकड  $\Delta$  समोवती एक० कर. (कृत्यानें) अक = बड आहे.  
अब बक = बड तेव्हां (१बु० ३० सि०प्र०) बड ही अकड० ची  
स्पर्शरेषा आहे ∴ (१बु० ३२ सि०प्र०) बडक =  $\angle$ अ यांत  $\angle$ अड  
क साधारण मिळविता असतां,  $\angle$ अ +  $\angle$ अडक =  $\angle$ अडब आ  
णि (१बु० ३२ सि०प्र०)  $\angle$ अ +  $\angle$ अडक =  $\angle$ डकब, बडक +  $\angle$ अड  
क =  $\angle$ अडब ∴ बकड = अडब (१बु० ५ सि०प्र०) ब =  $\angle$ अडब  
∴ ब = बकड ∴ (१बु० ६ सि०प्र०) बड = कड परंतु बड = अक  
आहे ∴ कड = अक ∴ (१बु० ५ सि०प्र०)  $\angle$ अ =  $\angle$ अडक आहे  
आणि (१बु० ३२ सि०प्र०)  $\angle$ अ +  $\angle$ अडक अथवा  $\angle$ अ = बकड  
अ  $\angle$ बडअ हे सिद्ध.

### अकरावा सिद्धांत.

ह०क० २१

वर्तुळांत संलग्न समबाजू समकोण पंच कोणा कृति कराव-  
याचे.

अब कडई० त संलग्न समबाजू समकोण पंच कोणा कृति

करावयाचें.

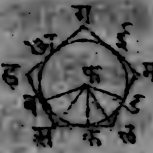
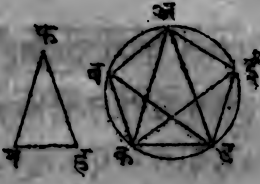
(१ बु० १० सि० प्र०) फगह  $\triangle$  कर असा  
 कीं, जाचा पाया कडील मत्येक कोन वि  
 र कोनाचे दुप्पट होईल. (१ बु० २ सि० प्र०) अबकडई  $\circ$  त फगह  
 $\triangle$  चीं समकोण असा एक अकड  $\triangle$  कर आणि त्याचे पाया क-  
 डील  $\angle$  क आणि  $\angle$  ड, कई, डव रेखांनीं दुभाग अत्र ब, क, अ, ई ई  
 $\angle$  ड सांघ. म्हणजे अबकडई ही समबाजू पंच कोणाकृति झाली.  
 कारण  $\angle$  क अ ड =  $\angle$  क ड ब =  $\angle$  ब ड अ =  $\angle$  अ क ई =  $\angle$  ई क ड आ-  
 हे. तेव्हां त्यांचे कौंस ही (३ बु० २६ सि० प्र०) परस्पर बराबर आहेत.  
 $\therefore$  (३ बु० २६ सि० प्र०) त्यांचा ज्याही परस्पर बराबर आहेत.  $\therefore$  अ-  
 बकडई ही समबाजू पंचकोणाकृति आहे आणि अब, बक, कड,  
 डई, ईअ हे कौंस परस्पर बराबर आहेत.  $\therefore$  अबकड कौंस = बक  
 डई कौंस आहे. (३ बु० ३० सि० प्र०)  $\angle$  ब अ ई =  $\angle$  अ ई ड आहे.  
 याप्रमाणेंच  $\angle$  ड,  $\angle$  क आणि  $\angle$  व हेही  $\angle$  ब अ ई चे बराबर आहेत.  
 $\therefore$  अबकडई ही पंचकोणाकृति समकोण आहे. हें सिद्ध.

### बारावासिदांत. ह० क० ३१

वर्तुळा भोंवती संलग्न समबाजू समकोण पंचकोणाकृतिक  
 रावयाचें.

अबकडई  $\circ$  चा समोवती संलग्न समबाजू  $\triangle$  ह  
 समकोण पंचकोणाकृतिक करावयाचें.

मागील सिदांता प्रमाणें त्या  $\circ$  चे ५ भाग करून, त्याविंदूनूच  
 $\circ$  स सह, हग, गम, मल, लस स्पर्शरेषा कर त्यापासून इच्छिती-  
 पंचकोणाकृति होईल.





फ, व फस फक फल फड बिंदुसांध. तेव्हां (३. बु. ३. सि. कु. प्र०) वस = सक आहे. (१. बु. ०. सि. प्र०) वफस आणि सफक हे दोन एक रूपः. <वफस = <सफक आणि <वसफ = <कसफ. २. <कफस = <कफव, २. <कसफ = <कसव तसेंच २. <कफल = <कफड आणि २. <कलफ = <कलड आहे. परंतु वक कौंसकड कौंसा बराबर आहे. (३. बु. २. ७. सि. अ.) <वफक = <कफड आहे. (७. प्र. प्र०) <सफक = <कफल आहे. (१. बु. २६. सि. प्र०) सफक आणि कफल हे दोन विष्णु रूप आहेत. २. सक = सल तसेंच वस = सह परंतु वस = सक आहे. (६. प्र. प्र०) सल = सह आहे. या प्रमाणेंच सर्व बाजू परस्पर बराबर आहेत. आणि (वरसिद्ध के. प्र०) <फसक = <फलक आहे. (६. प्र. प्र०) <वसक = <कलड आहे. या प्रमाणेंच सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत. गड सल म ही पंच कोणा कृति ० बाहेर संलग्न समबाजू समकोण आहे. हे सिद्ध.

### तेरावा सिद्धांत कृत्य.

समबाजू समकोण पंचकोणांत संलग्न वर्तुळ करावयाचें. अबकडई समबाजू समकोण पंचकोणा कृति आहे, त्यांत वर्तुळ करावयाचें. क आणि ड कोन कफ आणि डफ रेघांनीं दुभाग, त्या दोन रेघा फ बिंदूंत मिळतात त्या बिंदू पासून फब, फअ, फई रेघा कर. फबक आणि फकड हे दोन (१. बु. ४. सि. प्र०) एक रूपः. वफ = डफ, <कबफ = <कडफ आणि <कडई = <कबअ आहे. यांतून <कडफ = <कबफ हे व



जाकरिता (१५० म०) बाकी <फडई = <फबअ : <कबफ =  
 <फबअ आहे : फब रेघ <कबअ सदुभागिते या प्रमाणेच  
 <अ आणि <ई यांसही अफ आणि ईफ या रेखादुभागितात आ  
 तां सर्वबाजूंवर फ बिंदू पासून लंब केले असतां (१ बु० २६ सि० म०)  
 फग, फह, फस, फल, फम बराबर आहेत : फ हा इच्छिते  
 ० चा मध्य आहे. हे सिद्ध.

### चवदावासिद्धान्त. ह० क० १३

समबाजू समकोण पंचकोणा सभोवती संलग्न वर्तुळांक  
 करावयाचे.

अबकडई एक समबाजू समकोण पंचको  
 णाकृतीचे बाहेर संलग्न वर्तुळांक करावयाचे.



क आणि ड कोन कफ, डफ रेखांनी दुभाग,  
 त्या रेखा फ स्थळी परस्परांस मिळतील, त्या बिंदू पासून फब,  
 फअ, फई रेखा करा त्या (मागील सि० सिद्ध केल्या म०) ख, <अ  
 आणि <ई यांस दुभागितात.

आतां <बकड = <कडई : त्यांची अर्धे <फकड, <कडक  
 बरोबर : फकड = त (१ बु० २६ सि० म०) फक = फड आहे या  
 प्रमाणेच फब, फअ, फई यांही प्रत्येकी फड चे बराबर आहे  
 त. तेव्हा यांतून एक विन्या मानून केलेले ० समकोण पंचकोणा  
 बाहेर संलग्न आहे. हे सिद्ध.

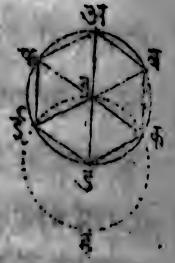
### पंधरावासिद्धान्त. ह० क० १४

वर्तुळांत समबाजू समकोण षट् कोणाकृति करावयाचे

अबकडईफ एक ० आहे, त्यांत समबाजू समकोण षट्

कोणाकृतिकरावयाचें.

आतां दिल्या ० चा मध्यकातून अगड व्यास-  
कर आणि डग भिज्येनें ० मध्यकातून गक ह-  
ई ० कर. अब बक कड, डई ईफ आणि अफ  
सांध. गई = गड, गड = डई, गई = गड = ईड  
∴ (१ बु० ५ सि० प्र०) गईड हा  $\Delta$  समकोण आहे, व (१ बु० ३३ सि०  
चे आधारें)  $\angle$  ईगड =  $\angle$  गडक =  $\angle$  डईग =  $60^\circ$  याप्रमाणेंच-  
 $\angle$  डगक =  $60^\circ$  आहेत. आतां ईब रेघेवर कग रेघ मिळून, (१ बु०  
१३ सि० प्र०)  $\angle$  ईगक +  $\angle$  कगब =  $120^\circ$  परंतु  $\angle$  ईगक =  $120^\circ$  ∴  
 $\angle$  कगब =  $60^\circ$  ∴ ईगड, डगक, कगब हे तीन ही कोन परस्पर  
बराबर. आणि (१ बु० १५ सि० प्र०) याचा समोरा समोरचे कोनही  
मत्येकीं  $60^\circ$  बराबर आहेत. यावरून गस्थळावरील सहाही कोन  
मत्येकीं  $60^\circ$  आहेत. (३ बु० २६ सि० प्र०) अब, बक, कड, डई,  
ईफ, अफ हे कोंस बराबर आहेत, ∴ (३ बु० २९ सि० प्र०) बराब-  
र कोंसांचा ज्याही बराबर ∴ अबकडईफ हें समबाजू पट्टको-  
ण आहे. अफ कोंस = ईड कोंस आहे. यांत साधारण अब  
कड मिळविला असतां, फ अबकड कोंस = ईडकबअ-  
कोंस आहे ∴ (३ बु० २७ सि० प्र०)  $\angle$  अफई =  $\angle$  फईड आहे. याप्र-  
माणेंच सिद्ध होतें कीं, अबकडईफ या पट्टकोणाचे दुसरे को-  
न  $\angle$  अफई कोनाचे बराबर होतात, ∴ ही पट्टकोणाकृति ० त  
समबाजू समकोण संलग्न आहे हें सिद्ध.  
कु. वर्तुळांतील समबाजू पट्टकोणाची मत्येक बाजू भिज्येव  
बराबर असते.





## सोळावासिद्धान्तःकृतः

वर्तुळांत समबाजू समकोण पंचदश कोणाकृति करावयाचें.

अबकड० त (१५बु० २सि० प्र०)

अडक एक समबाजू  $\Delta$  कर, (१५बु०

११सि० प्र०) अशी एक समबाजू पं

चकोणाकृति करकीं, तिचा आणि

$\Delta$ चा शिरोबिंदु एक होईल. आतां

अबक कोंसांत पंचदश भागांपैकीं

पांच भाग आहेत, आणि अब कोंसांत तीन भाग आहेत :

बक कोंसांत दोन भाग आहेत. आतां (३बु० ३० सि० प्र०) बक

कोंस ई स्थळीं दुभागला : बई कोंस त्या वर्तुळाचा १५वा भाग

आहे, त्याणें वर्तुळाचे १५ भाग करून त्यांचीं टोंकें सांघिलीं, ह्या

णजे त्या पासून इच्छिली समबाजू समकोण पंचदश कोणाकृति

होईल. हे सिद्ध.



## चवथ्याबुकाचे प्रश्न.

१ वर्तुळाचे आंतील व बाहेरील बिंदू पासून दिलेले रेघे बराबर एक ज्या करावयाची.

२ दिलेले रेघे बराबर आणि दिलेले रेघेशीं स० तिशीं दिलेले कोनाबराबर कोन करणारी वर्तुळांत ज्या करावयाची.

३ दिलेले वर्तुळास दिलेले रेघेशीं स० अशी स्पर्शरेघ करावयाची.

४ दिलेले रेघेशीं दिलेले कोनाबराबर कोन करील अशी वर्तुळास स्पर्शरेघ कर.

५ दिलेल्या रेघे मध्ये असा एक बिंदु काढकीं, तो त्या रेघेतील दु



सन्ध्या एका दिलेल्या बिंदू पासून आणि दुसऱ्या दिलेल्या रेघेपासून बराबर अंतराने होईल.

६ दिलेल्या बिंदूतून जाणारे आणि दिलेल्या रेघेस दिलेल्या बिंदूस्थळी स्पर्श करणारे असे एक वर्तुळ कर.

७ दोन वर्तुळास साधारण स्पर्श रेघ कर.

८ दिलेल्या रेघे मध्ये असा एक बिंदु काढ की, तो दुसऱ्या दिलेल्या बिंदू पासून व दिलेल्या रेघे पासून बराबर अंतराने होईल.

९ दिलेल्या दोन बिंदूतून जाणारे व दिलेल्या रेघेस स्पर्श करणारे वर्तुळ कर.

१० दिलेल्या वर्तुळास व दिलेल्या रेघेतील दिलेल्या बिंदूस्थळी स्पर्श करणारे वर्तुळ कर.

११ वर्तुळांतील समबाजू अष्ट कोणाचे क्षेत्रफळ त्या वर्तुळाचे आतील व बाहेरील चौरसाचे बाजूंचे का. चौ. बराबर आहे.

१२ दिलेल्या वर्तुळ पादांत वर्तुळ कर.

१३ दिलेल्या बिंदूतून जाणारे व दिलेल्या वर्तुळास दिलेल्या बिंदूस्थळी स्पर्श करणारे वर्तुळ कर.

१४ वर्तुळा बाहेरील संलग्न चौ. बाजूचे समोरा समोरचे बाजूंची बेरीज चौ. बाजूचे अर्ध परिमिति बराबर आहे.

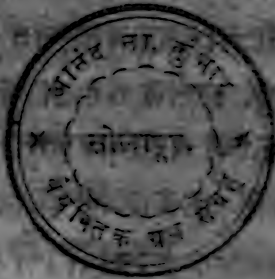
१५ बहुकोनाकृतीचा सर्व बाजू दोहोंकडे वाढविल्या असता, त्या मिळून जे कोन होतात, त्यांची बेरीज बाजू संख्येचे दुप्पटीत आठ उणे इतके का. बराबर आहे.

१६ का. चौ. क्षेत्रास समोरा समोरचा बाजू व्यास मानून, त्याचे एके क्षेत्र अंगास दोन अर्ध वर्तुळे केली असता, त्यांचे मधील क्षेत्रफ

वत्याकाचौबराबर आहे.

१७ दिलेले दोन रेखांस स्पर्श करणारे व दिलेल्या बिंदूतून जाणा  
रे वर्तुळ कर.

१८ दिलेल्या वर्तुळास व दिलेल्या दोन रेखांस स्पर्श करणारे व  
वर्तुळ कर.



## वृक पांचवे.

### प्रथमसिद्धांत.

चारपदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हां आद्यंत पदांचा गुणाकार मध्यपदांचे गुणाकारा बराबर आहे.

अः वः :: कः ड असें असल्यास अड = वक होईल.

अ = व असें आहे. दोनही पेट्यांस बड ने गुणून, अड = वक हें सिद्ध.

कुर. तीन पदे असवड प्रमाणांत असल्यास आद्यताचा गुणाकार मध्य पदाचे वर्गाबराबर असतो.

### दुसरा सिद्धांत.

दोन पदांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन पदांचे गुणाकारा बराबर असला, तर तीं चार पदे प्रमाणांत आहेत.

अड = वक असेल, तर अः वः :: कः ड होईल.

अड = वक या समीकरणास बड ने भागिलें असतां अ = व :: अः वः :: कः ड हें सिद्ध.

### तिसरा सिद्धांत.

आ पदांचे दुसऱ्या एक पदाशीं गुणोत्तर बराबर आहे, तीं पदे परस्पर बराबर आहेत.

अ आणि व यांचें गुणोत्तर क शीं बराबर आहे; या अंकरितां अ = व होईल.

अ = व या दोनही पेट्यांस क ने गुणून, अ = व हें सिद्ध.

### चवथा सिद्धांत.

जीं गुणोत्तरें दुसऱ्या एका गुणोत्तराशीं बराबर आहेत, तीं परस्पर बराबर असतात.

अःबः॥क्षःय आणिकःडः॥क्षःय आहे, तर अःबः॥कःड  
होईल.

अःबः॥क्षःय सणजे  $\frac{अ}{ब} = \frac{क्ष}{ड}$  आणिकःडः॥क्षःय सणजे  
 $\frac{क}{ड} = \frac{क्ष}{ड}$  तेव्हा  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  आहे. अःबः॥कःड हे सिद्ध.

पांचवासिद्धांत. .... ह. ५०

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती परावर्तनाने ही प्र  
माणांत होतात.

अःबः॥कःड आहे, त्यास अःकः॥बःड होईल.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  या दोन ही पेट्यास  $\frac{ब}{ड}$  याने गुणिले असता  $\frac{अ}{ड} = \frac{ब}{ड}$   
अःकः॥बःड हे सिद्ध.

सहावासिद्धांत. .... ह. ५०

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती व्यस्ताने ही प्रमा  
णांत होतात.

अःबः॥कःड आहे, त्यास बःअः॥डःक होईल.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  या समीकरणाने  $१ = १$  या समीकरणास भागिले  
असता  $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$  सणजे बःअः॥डःक हे सिद्ध.

सातवासिद्धांत. .... ह. ५१

चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती मिश्रणाने प्रमाणांत होतात.

अःबः॥कःड आहे, त्यास अ+बः॥क+डःड होईल.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  या दोन ही पेट्यांत एक मिळविला असता अ+बः  
बः॥क+डःड आहे हे सिद्ध.

आठवासिद्धांत. .... ह. ५१

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती व्यस्ताने प्रमाणांत होतात.



माणांत आहेत.

अः बः कः ड असें आहे तर अ-बः बः कः डः ड होईल.  
 $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  या समीकरणाचे दोनही पेट्यांत एक वजा करून प्रमा-  
 ण मांडिले, तेव्हा अ-बः बः कः डः ड हे सिद्ध.

कुः या व मागील दोन सिद्धांतां पासून स्पष्ट दिसून येतं की, चतुः  
 प्रमाणांतील पहिले आणि दुसरे यांचे बेरजेसः त्यांची वजाबा-  
 कीः तिसरे आणि चवथे यांचे बेरजेसः त्यांची वजाबाकी हो-  
 ते.

$\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$  आणि  $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$  यांत दुसऱ्याने प्रथमास-  
 भागून, अ+बः अ-बः क+डः क-ड हे सिद्ध.

**नववासिद्धांत.**

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती व्यस्त वजाबाकीने  
 ही प्रमाणांत आहेत.

अः बः कः ड आहे त्यास अः अ-बः कः क-ड होईल.  
 प्रथम प्रमाणाचे परावृत्त गुणोत्तर  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  असें आहे. दो-  
 नही पेटे एकांतून वजा करून, व त्याबाकीने एकास भागून, अः  
 अ-बः कः क-ड हे सिद्ध.

**दहावासिद्धांत.**

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा ती बेरजेने ही प्रमाणांत  
 होतात.

अः बः कः ड त्यास अः अ+बः कः क+ड होईल.  
 प्रथम प्रमाणाचे परावृत्त गुणोत्तर  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  या दोनही पेट्यांत एक  
 मिळवून त्याने एकास भागिले, तेव्हा अः अ+बः कः क+ड हे सिद्ध.

## अकरावासिद्धांत

जांचा पदांची संख्या सारखी अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन या प्रमाणें सर्व पदे सरळ प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या श्रेणीचा पहिल्या पदास तिचे शोबदील पद दुसरे श्रेणीचे पहिले पदास तिचे शोबदील पद.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह या दोन श्रेण्यांचीं पदे प्रतिज्ञे म. सरळ प्रमाणांत आहेत. त्यास अ. ड. ई. ह होईल.

(प्रतिज्ञे म.)  $\frac{अ}{ब} = \frac{ई}{क}$ ,  $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$  आणि  $\frac{क}{ड} = \frac{ग}{ह}$  असें आहे, ते जेव्हा तीनही समीकरणांचा गुणकार करून, संक्षेप देऊन प्रमाण मांडिले, तेव्हा अ. ड. ई. ह हे सिद्ध.

## बारावासिद्धांत

जांचा पदांची संख्या सारखी आहे अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन या म. सर्व पदे वक्र क्रमानें प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या श्रेणीचे प्रथम पद तिचे शोबदील पदास, तर दुसरीचे प्रथम पद तिचे शोबदील पदास होईल.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह यांतील दोन दोन पदे प्रतिज्ञे म. वक्र प्रमाणांत आहेत, लणजे अ. ब. ग. ह, ब. क. फ. ग. क. ड. ई. फ. त्यास अ. ड. ई. ह होईल.

(प्रतिज्ञे म.)  $\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$ ,  $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$  आणि  $\frac{क}{ड} = \frac{ई}{ह}$  असें आहे, ते जेव्हा सर्व समीकरणांचा गुणकार करून, संक्षेप केला असता अ. ड. ई. ह हे सिद्ध.

## तेरावासिद्धांत

जेव्हा चार पदे प्रमाणांत आहेत, तेव्हा त्यांचे वर्ग घेना दि. किंवा

वर्गमुक्तादि प्रमाणांत असतात.

अः बः कः ड आहे, तेव्हां त्याचे कोणातेही घात किंवा घातपूर्व प्रमाणांत होतील.

(प्रतिज्ञे प्र०) अ = क या दोनही पेट्यांना म घात करून नवा तमूक काढून, प्रमाणे मांडिला; तेव्हां अः बः कः ड आणि अः गः वः कः ड हे सिद्ध.

चवदावासिद्धांत.

जर किती एक पदे प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या अग्रसरास जर पहिला उपाग्रसर, तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्रसरांची बेरीज होईल.

अ, ब, क, ड, ई, फ, ग, ह हीं पदे प्रमाणांत आहेत, त्यांचे अः बः कः डः ईः फः गः ह त्यास अः बः अ + क + ई + गः ब + ड + फ + ह होईल.

अब = अब } असें आहे त्यास यासमीकरणांची बेरीज घेऊ.  
अड = बक } न अब + अड + अफ + अह = अब + बक + बई  
अफ = बई } + वग असें होतें. साधारण गुणक काढून,  
अह = बग } अ (बड + ह + फ) = ब (अ + क + ग + ई) त्याचजे  
अः बः अ + क + ई + गः ब + ड + फ + ह, हे सिद्ध.

कु० किती एक पदे प्रमाणांत असल्यास, कोणत्याही अग्रसरास, जर त्याचा उपाग्रसर, तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस, सर्व उपाग्रसरांची बेरीज.

पंधरावासिद्धांत.

जर तीन पदे अरबंड प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या प

रासजर तिसरें पद, तर पहिले पदाचे वर्गास तिसरे पदाचा वर्ग.  
 अ, ब, क हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, हणजे अः  
 बः बः कः त्यास अः कः॥ अः बः होईल.  
 अ = क असें आहे, त्यास यासमीकरणास अ या नें गुणिलें  
 असतां अ = क हणजे अः कः॥ अः बः हें सिद्ध.

### सोळावा सिद्धांत.

जर चार पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास ज  
 रचवयें पर, तर पहिल्या पदाचे घनास दुसरे पदाचा घन.

अ, ब, क, ड हीं चार पदें अखंड प्रमाणांत आहेत. हणजे  
 अः बः बः कः॥ कः ड त्यास अः डः॥ अः बः होईल.  
 अ = ब, अ = क आणि अ = ड असें आहे, तेव्हां यासमी  
 करणांचा गुणाकार घेतला असतां अ = ड असें होतें, हण  
 जे अः डः॥ अः बः हें सिद्ध.





# बूकसहावे.

## प्रथमसिद्धांत.

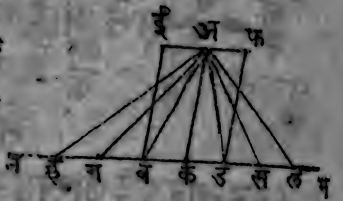
ह०६०

एकाउंचीचे विकोण व स० चौ० आपल्या पायाशी ममाणांत असतात.

अबक आणि अकड हे दोन बि० व

ईक आणि फक हे दोन स० चौ० एका

च उंचीचे आहेत, तर अबक  $\Delta$ :



अकड  $\Delta$ : बक: कड आणि ईक  $\square$ : फक  $\square$ :

बक: कड होईल.

कड बाजू दोहोंकडे न आणि म पर्यंत वाढवून, तीं नूतन बक रेघे

एवढे वग, हग; आणि कड रेघे एवढे डस, सल भाग घे. अं, ह

अ, ग अ, स अ, ल बिंदु सांध. हणजे अ ह ग, अ ग व, अबक

हे  $\Delta$  (१ बु० ३८ सि० प्र०) परस्पर बराबर. तसेंच अडक, असड;

अलस हे ही परस्पर बराबर. कह, बक चा जितके पट आहे, ति

तके पट अहक  $\Delta$ , अबक  $\Delta$  चा आहे. तसेंच कल, कड चा जित

के पट आहे, तितके पट अकल  $\Delta$ , अकड  $\Delta$  चा आहे. बक, कड

पाये आणि अबक, अकड हे  $\Delta$  अशीं चार पदे आहेत. यांत बक

पाया आणि अबक  $\Delta$  यांची सम व्यापकें अनुक्रमें हक पाया-

आणि अहक  $\Delta$  आहेत. तसेंच कड पाया आणि अकड  $\Delta$

यांची समान व्यापकें कल पाया आणि अकल  $\Delta$  हीं आहेत;

कह पाया जर कल पाया पेक्षां मोठा असेल; तर अहक  $\Delta$  अ

कल बि० पेक्षां मोठा होईल, बराबर असेल तर बराबर होईल,

आणि लहान असेल, तर लहान होईल; (१० व्या० प्र०) बक:

॥ उंची साहावे लंबांची समजावी.

कडः अवकः अकड हैं सिद्ध

(१ बु० ५१ सि० प्र०) ईक, कफ हे स० चौ० अनुक्रमें अवक, अड  
फ० चे दुप्पट आहेत, आणि परे आपल्या समान व्यापकांशीं  
प्रमाणांत आहेतः अवक० : अकड० :: ईक० : फक०,  
(वर सिद्ध केल्याप्रमाणे) वकः कडः :: अवक० : अकड० (१ बु०  
५१ सि० प्र०) वकः कडः :: ईक० : फक० हैं सिद्ध

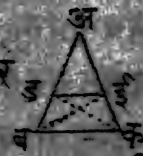
प्रथम कुर० समान उंचीचे त्रि० व स० चौ० पायाशीं प्रमाणांत असतात

दुसरी कुर० जांचे पाये समान आहेत असे त्रि०, का० चौ० व स०  
चौ० हे आपले उंचीशीं प्रमाणांत असतात

दुसरा सिद्धांतः ..... ह० २२

कोणत्याही त्रि० त एका बाजूशीं स० रेघ केली, तर ती दुसऱ्या देल  
बाजू स त्या आहेत तशाच असतां, किंवा वाढविल्या असतां प्र  
माणांत छेदील. अ० प्रमाणाने छेदीत असेल, तर ती रेघातिसरे  
बाजूशीं स० होईल

अवक० तडई रेघ व क पायाशीं स० केली, तर  
अडः वडः :: अईः ईक होईल



वई क, ड सांघ, डईक आणि डईब हे दोन (१ बु० ३० सि०  
प्र०) बराबरः त्यांचे गुणोत्तर अडई० शीं समान आहेत, आणि  
(१ बु० १ सि० प्र०) अडई० : डईब० :: अडः डब आणि अडई० :  
डईक० :: अईः ईक परंतु डईब० = डईक० आहेः (१ बु० ४  
सि० प्र०) अडः डब :: अईः ईक हैं सिद्ध

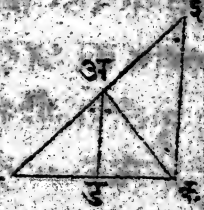
उलट प्रकार

इक बई सांध (प्रतिज्ञे प्र०) बडः डअः कडईः ईअ आहे.  
 व (६ बु० १ सि० प्र०) बडः डअः बडईः ईडअ आणि  
 कडईः ईअः कडईः डईअ तेव्हा (५ बु० ३ सि० प्र०) व  
 डईः ईडअः कडईः ईडअ आहे, व बडईः =  
 कडईः आणि हे एकाच पायावर आहेतः (१ बु० ३१ सि० प्र०)  
 डई बक या संध्यांचे एकाच जोडांत आहेत, तेव्हा डई बक  
 शी स० आहे हे सिद्ध.

तिसरा सिद्धांतः..... ह० ८३

जीरेषा त्रिकोणाचा कोणताही कोन दुभागते, ती त्याचे समोरचे  
 बाजूचे दोन खंड करिते, हे दोन खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशी प्रमा-  
 णांत आहेत. उलट. ते खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशी प्रमाणांत अ-  
 सतील, तर खंड करणारी रेषा समोरचे कोनास दुभागील.

अबक त्रिअड रेषा कोनास दुभागून,  
 बक पायाचे दोन खंड करील, तर बडः डकः  
 अबः अक होईल आणि याचे उलट असे  
 असेल तर ती रेषा कोनास दुभागील.



अड शी कडई स० कर आणि अब रेषा कडई समिळे पर्यंत वा-  
 दीव. (१ बु० ११ आणि ६ सि० प्र०) अई = अक आहे, आणि बक  
 ई त कडई रेषा अड शी स० आहेः (६ बु० २ सि० प्र०) बडः डक  
 :: बअः अई अ० अक हे सिद्ध.

उलट. बडः डकः अबः अक गृहीत आहे. (६ बु० १ सि० प्र०)  
 बडः डकः बअः अई तेव्हा (५ बु० ३ सि० प्र०) अक =  
 अईः (१ बु० ५ सि० प्र०) < ई = < अक ई परवु अड शी कडई स०.

आहेः (१ बु० २९ सि० प्र०) <ई = <बअड आणि <अकई =  
<डअकः <बअड = <कअड आहे. हे सिद्ध

### असिद्धांत.

त्रिकोणाचा बाहेरील कोनास दुभागणारी आणि पायावाढवि  
त्या असता, त्यास मिळणारी अशी रेघ केळीतर वाढविल्यास  
सर्व पाया वाढविले पायाची ममाणांत होईल. जसे त्या त्रि  
कोणाचा राहिल्या बाजू, अथवा असे ममाण असेल, तर त्रिको  
न आणि वाढविलेले पायाचा शेवट सांधिला असता ती रेघ बाहे  
रील कोनास दुभागील.

अबक  $\triangle$  ची बअ वा मूई पर्यंत वाढवून  
<कअई दुभागणारी आणि बक पायावाढ  
वून त्यास ड स्थळी मिळणारी अशी अड रेघ  
केळीतर वडः कडः अबः अक होईल. आणि असे ममाण  
असेल तर अड रेघ <कअईस दुभागील.



अड रेघेची क बिंदूतून कफ रेघसंकर (१ बु० २९ सि० प्र०)  
<अक = <ईअड आणि <अक = <डअक अ० <डअ  
ईः (१ प्र० प्र०) <अक = <अकफः (१ बु० ६ सि० प्र०) अक =  
अफ, बअड  $\triangle$  त अड पायाची फक सं० आहे तेव्हा (६ बु०  
२ सि० प्र०) वडः कडः बअः फअ अ० अक आहे. हे सिद्ध.

उलट वडः कडः अबः अक गृहीत आहे. आणि (६ बु०  
२ सि० प्र०) वडः कडः अबः अफ आहे (१ बु० ६ व २ सि० प्र०)  
अफ = अक आहे, व (१ बु० ५ २१ सि० चे आधारें) अड रेघ  
<कअईस दुभागीत. हे सिद्ध.



## चवथासिद्धांत.

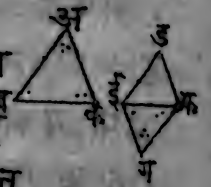
समकोण त्रिकोणांत समकोणाज बाजूचा बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात.

अबक आणि डकई या दोन  $\Delta$  त  $\angle ब = \angle डकई$   
 $\angle अ = \angle ड$  आणि  $\angle अकब = \angle ई$  असें असेल, तर  
 बअः बक :: कडः कई अ० बअः अक :: कडः डई इ० होईल.  
 हे दोन  $\Delta$  क बिंदूस्थळीं जोड असेकीं, बई रेघेत दोनही त्रि० चे पाये येतील. नंतर बअ, ईड बाजू फ बिंदूस्थळीं मिळत पर्यंतचा टीव. (१ बु० २ = सि० प्र०) बफशी कड आणि अकशी फईस० आहे. (१ बु० ३४ सि० प्र०) अफ = कड आणि अक = फड आ हेत. (६ बु० २ सि० प्र०) बकः कई :: बअः अफ अथवा कड परा वर्तमानें बकः बअ :: कईः कड हें सिद्ध.

## पांचवासिद्धांत. . . . . ह० ८५

जा त्रिकोणाचा बाजू अनुक्रमाने मध्येकीं परस्पर प्रमाणांत असतात, ते त्रि० परस्पर समकोण असतात. आणि त्यांचे सम कोन सजातीय बाजूंचा समोर असतात.

अबक आणि डईफ या दोन  $\Delta$  चा बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत असतील, तर ते  $\Delta$  परस्पर समकोण होतील. आणि त्यांचा सजातीय बाजू समकोणा समोर असतील. सणजे अबः बक :: डईः ईफ होईल. ईफ रेघेवर अबक  $\Delta$  शी समकोण  $\Delta$  कर. असाकीं,  $\angle ब = \angle फईग$ ,  $\angle क = \angle ईफग$  आणि  $\angle अ = \angle ग$  होईल. तेव्हा (६ बु० ४ सि० प्र०) अबः बक :: गईः ईफ आणि (प्रतिशे म०) अबः बक ::

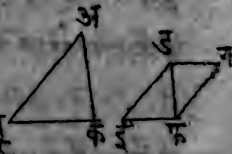


डई: डफ: (५ बु० ४, ३ सि० प्र०) ईड = ईग: तसेंच डफ = फग  
 आहे: डईफ, डईग हे दोन  $\Delta$  (१ बु० ८ सि० प्र०) एकरूपते  
 व्हांते परस्पर समकोन आहेत. गईफ आणि अबक हे दो  
 न  $\Delta$  समकोन आहेत: (१ प्र० प्र०) अबक  $\Delta$  डईफ  $\Delta$  यां समको  
 न आहेत हे सिद्ध.

### सहावा सिद्धांत. .... ह० ८६

एका त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एक कोनाब  
 र आणि त्याबराबर कोनाचा शेहोंकडील बाजू अनुक्रमेण  
 त्यां परस्पर प्रमाणांत असतील, तर ते दोन त्रिकोण परस्पर  
 समकोण होतील. आणि त्यांचे समकोण सजातीय बाजूंनी प्र  
 माणांत असतील.

अबक आणि डईफ या दोन  $\Delta$  त  $\angle$  अ  
 =  $\angle$  ड आणि अब: अक :: डई: डफ असे  
 असेल, तर हे दोन  $\Delta$  परस्पर समकोण होतील.



अबक  $\Delta$  यां समकोण डफ रेघेवर डगफ  $\Delta$  कर असावी,  
 $\angle$  अ किंवा  $\angle$  ड =  $\angle$  गडफ,  $\angle$  क =  $\angle$  गफड आणि  $\angle$  ब =  $\angle$  ग हो  
 ईल. आतां (६ बु० ४ सि० प्र०) बअ: अक :: गड: डफ आणि (प्र  
 तिज्ञे प्र०) बअ: अक :: डई: डफ :: (५ बु० ४ व ३ सि० प्र०) ईड = गड  
 तेव्हां डईफ आणि डगफ हे दोन  $\Delta$  (१ बु० ४ सि० प्र०) एकरूप  
 डगफ  $\Delta$  अबक  $\Delta$  यां समकोण आहे: अबक  $\Delta$  डईफ  $\Delta$  यां  
 समकोण आहेत हे सिद्ध.

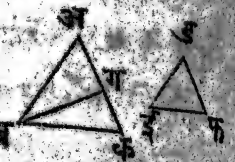
### सातवा सिद्धांत.

अर दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याचा एक कोना

बसबर आणि त्या बसबर कोना शिवाय दुसरे कोना अवकी-  
ल बाजू अनुक्रमे प्रत्येकीं प्रमाणांत आणि तिसरे कोन प्रत्ये-  
क लघु किंवा विशाल असतील, तर हे दोन त्रि० परस्पर स-  
मकोण होतील.

अबक आणि डईफ या दोन  $\Delta$  तः  $\Delta$  अ

= ड आणि <ब आणि <ई यांचा बाजू प्र



माणांत आहेत. म्हणजे अबःबकः डईःईफ आणि <क  
आणि <फ प्रत्येकीं लघु किंवा विशाल आहेत, तर हे दोन  $\Delta$  प-  
रस्पर समकोण होतील. प्रथम <क आणि <फ लघु मानून.

<ब = <ई नाही असे मानित्यास <ब) <ई मानून, अबरेघेरीं  
ई कोनाबराबर कोन करणारी बबिंदूनून बगरेघ कर. तेव्हा  
(१ बु० २३ सि० प्र०) अबग आणि ईफड हे दोन  $\Delta$  समकोण आहे-  
त. (६ बु० ३ सि० प्र०) अबःबगः डईःईफ आहे; परंतु अबः

बकः डईःईफ गृहीत आहे. (५ बु० १६ सि० प्र०) बक = बग  
आहे. (१ बु० ५ सि० प्र०) <बगक = <क आहे; परंतु <क लघु आ-

हे, यास्तव <बगक ही लघु आहे. (१ बु० १३ सि० प्र०) <बगअ

किंवा त्याचे बगबरीचा <क विशाल आहे; परंतु <फ लघु घेत-

ला आहे, तेव्हा हे होणें अशक्य. <अबक = <डईफ आहे.

अबक, डईफ हे दोन  $\Delta$  समकोण आहेत हे सिद्ध.

तसेंच <क विशाल असल्यास <क + <बगक > २ का० हेही अ-  
शक्य होय.

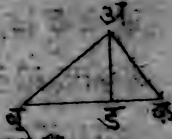
आठवासिद्धांत.

ह० ८०

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला अ

सता, त्याचा दोहों आंगास जे दोन का. वि. पडतात, ते सगळ्या वि. कोणाशीं व परस्परांशीं सरूप आहेत.

अबक का.  $\Delta$  तबक कर्णविर अ का. पासून-  
केलेले अड लंबाने अबड आणि अकड हे दोन  $\Delta$  झाले, ते अबक  $\Delta$  चीं व परस्परांशीं समकोण आहेत.



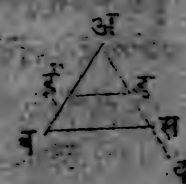
अबक आणि अबड या दोन  $\Delta$  त  $\angle$  ब साधारण  $\angle$  ब अक  $= \angle$  बड अ आहे, कारण का. आहेत. तेव्हां (१ बु. ३२ सि. प्र.) हे दोन  $\Delta$  समकोण आहेत. तसेंच अबक, अडक हेही सम कोण आहेत, अडब, अडक या दोन  $\Delta$  त ड का.  $=$  ड का.;  $\angle$  ब अड  $= \angle$  क तेव्हां (१ बु. ३२ सि. प्र.) तिसरा कोन ख  $= \angle$  क अड आहे. हेही दोन  $\Delta$  परस्पर समकोण व सरूप आहेत. हे सिद्ध.

कु. का. वि. त का. पासून कर्णविर लंब केला असता, तो लंब कर्णाचे दोन खंडांचे मध्यममाण आहे, आणि काटकोनचे दो-  
हों कडील बाजू मध्ये कीं कर्ण आणि त्या बाजू कडील कर्णाचा खंड यांचे मध्यममाण आहे.

### नववासिद्धांत.

कोणत्याही रेषेचा असा तुकडा पाडावयाचा की, ती रेषा त्या तुकड्याचे विवक्षित पट होईल.

अब सरळ रेषेचा असा तुकडा पाडावयाचा की, अब रेषा त्या तुकड्याचे विवक्षित पट होईल.



अब रेषेची कोणता तरी एक कोन करणारी, परंतु एथें लघु कोन करणारी अशी अक असर्वादि रेषा करून, त्या रेषेत कोण



त्याही अड खंडाचे विवक्षित पट अस खंड घेऊन वस बिंदु  
सांध आणि तिशीं ड बिंदूंत ड ई स कर. अब स त व स रेघे  
शीं ड ई स आहे. (६ बु. २ व. ५ बु. ७ सि. प्र.) अस : अड :  
अब अई : अड चे अस जितके पट आहे, तितके पट अई  
चे अब आहे, परंतु अस अड चे विवक्षित पट आहे. अब  
अई चे विवक्षित पट आहे. हे सिद्ध.

**दहावा सिद्धांत कृत्य** ..... ह. कृ.

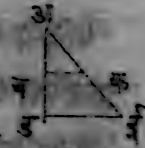
दिलेल्या रेघेचा खंडाशीं सरूप असे दुसऱ्या दिलेल्या रेघेचे खंड  
पाडावयाचे.

अब रेघेचे असे भाग पाडावयाचे कीं, ते दुसऱ्या  
अकरे घेचे अड, डई ईक या भागांशीं सरूप होतील.  
अब आणि अक या दोन रेखा लघु कोन करतील  
अशा ठेव, आणि त्यांची बक शोवटें सांध व बक शीं ई आणि ड  
बिंदू पासून ईग, डफ स कर, त्या अब रेघे स फ आणि ग स्थिती  
पैदिल, त्या पासून अफ, फग, गब हे इच्छिते खंड होतील.  
अबशी ड ह स स कर, तर फह आणि हब हे स ची आहेत.  
डह = फग आणि हस = गब आहे, डसक या त स क शीं  
ई ह स आहे. (६ बु. २ सि. प्र.) ई ड : ई ड : स ह ह ड अब  
ग. गफ आणि ग ई शीं फ ड स आहे. ई ड : अड : ग फ : अफ  
अब रेघेचे इच्छिते भाग झाले. हे सिद्ध.

**अकरावा सिद्धांत कृत्य** ..... ह. कृ.

त्रि प्रमाणांतील पहिल्या दोन रेखा कळल्या असतां, त्यां पासून  
तिसरी रेघ काढावयाची.

अब आणि अक या दोन रेखा नि प्रमाणांतील आ  
हेत, त्यां पासून तिसरी रेखा काढवयाची.

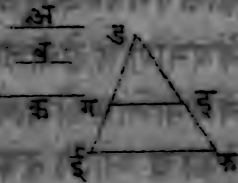


अब आणि अक या दोन रेखा कोन करीत अशा ठेव.

आणि त्या वादीव. मंतर अक = बड करवच, क बिंदु सांघून, ति  
शीं ड बिंदु तून डई रेख स कर. आणि अक तीस मिळे पर्यंत वा  
दीव. डई शी बक स आहे :: (६ बु. २ सि. म.) अब : बड : अक :  
कई, बड = अक आहे :: अब : अक :: अक : कई :: कई, अक  
अक यांचें तिसरें प्रमाण आहे. हे सिद्ध.

### बारावा सिद्धांत. कृ. १०१

चतुः प्रमाणांतील पहिल्या तीन रेखा कळत्या असतां, चवथी  
रेखा काढवयाची.



चतुः प्रमाणांतील अब, क रेखा कळ  
त्या आहेत. यां पासून चवथी रेखा काढ  
वयाची.

जांचा मध्यें लघु कोन होईल अशा डई, डफ रेखा कर, आणि  
अ = डग, ब = गई कर. क = डह करून वादीव गह सांघून  
तिशीं ई बिंदु तून ईफ रेख स कर. डईफ या त (६ बु. २ सि. म.)  
डग : गई :: डह : हफ, परंतु अ = डग, ब = गई आणि क = डह  
आहे :: अ : ब :: क : हफ :: अ, ब, क या तीन रेखांचें हफ हें चतुः  
प्रमाण आहे. हे सिद्ध.

### तेरावा सिद्धांत. कृ. १०२

त्रि प्रमाणांतील पहिली रेखा आणि शेवटील रेखा कळती असतां,  
त्या पासून मध्य रेखा काढवयाची.

पहिली आणि शेवटील अवक या रेखा-  
कळत्या आहेत त्यांपासून मध्यरेषा काढायची. अ-  
एक सरळ रेषेत अव आणि वक या लावून देव, अक सं-  
युक्त रेषेवर अडक अर्धवृत्त कर आणि त्या रेषेचे वसयोग  
स्थळी वडुलंब परिबापयेंत करड, अडक सांध (१ बु० ३१  
सि० प्र०) अडक का० Δ आहे, व का० पासून कर्णोवर वडुलंब  
आहे. (६ बु० ० सि० कु० प्र०) वडु रेषा अव आणि वक यांचे म-  
ध्य प्रमाण आहे. हे सिद्ध.

### चवदावा सिद्धांत.

अर दोन बराबर स० चौ० त एकाचा एक कोन दुसऱ्याचे एक-  
कोना बराबर असेल, तर त्या सम कोना अवकचा बाजू व्यतिक्रमा-  
ने प्रमाणांत होतील आणि सम कोना अवकचा बाजू व्यतिक्रमा-  
ने प्रमाणांत असल्यास ते स० चौ० परस्पर बराबर होतील.

अव आणि वक या दोन समान स० चौ० त अ-  
त्यांचे व विंदू अवकचे कोन परस्पर बराबर आड-  
हेत. तर डबः बई :: गबः फब होईल.

अव आणि वक हे स० चौ० असे देव कीं, डब आणि बई या-  
दोन बाजू एके सरळ रेषेत येतील. (१ बु० १५ सि० प्र०) गब आ-  
णि फब याही एके सरळ रेषेत येतील. ईफ स० चौ० पुराक-  
र. अवः फई :: वकः फई हे उभय उच आहे. (६ बु० १ सि० प्र०)  
अवः फई :: डबः बई आणि वकः फई :: गबः फब (१ बु० ४  
सि० प्र०) डबः बई :: गबः फब तेव्हा अव आणि वक या स०  
चौ० समान कोना अवकचा बाजू व्यतिक्रमाने प्रमाणांत आ-



हेतु हे सिद्ध.

उलट प्रकार. (६ बु० १ सि० म०) डबः बईः अबः फई आणि  
गबः फबः बकः फई आणि (प्रतिज्ञे म०) डबः बईः गबः  
फबः अबः फईः कबः फई तेव्हा (५ बु० ३ सि० म०) अब स०  
चौ० बक स० चौ० बराबर आहे. हे सिद्ध.

### पंधरावा सिद्धांतः..... ह० ०० चौकु०

दोन समान किंवा एकच एक कोन दुसऱ्याचा एक कोना बराबर आहे,  
हे, तर त्या समान कोनाजवळचा बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत  
आहेत. आणि दोन त्रि० त समान कोनाजवळचा बाजू व्यतिक्रमा  
नें प्रमाणांत आहेत, तर ते दोन त्रि० समान आहेत.

अबक आणि अडई या दोन समान त्रि०

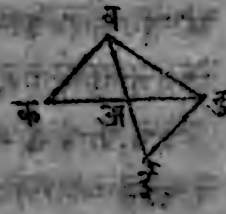
अस्थिरावरील कोन परस्पर बराबर आहेत,

तर कअः अडः ईअः अब होईल आणि

अस्थिरावरील कोन समान असून त्या समा

न कोनाचा बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतील, तर अबक

आणि अडई हे दोन त्रि० समान होतील.



हे दोन त्रि० असे ठेवकीं, कअ आणि अड या दोन बाजू एकेच म

रक रेघेत येतील. मग (१ बु० १४ सि० म०) अई आणि अब या

हे एकेच सरळ रेघेत येतील. ब, ड सांध. अबक त्रि० = अडई

त्रि० आहे. अबक आणि अडई यांचे अब ड त्रि० समान गु

णोत्तर आहे. म्हणजे अबक त्रि० अडब त्रि० अडई त्रि० अडब त्रि०

(६ बु० १ सि० म०) अबक त्रि० अब ड त्रि० कअः अड आणि

अडई त्रि० अडब त्रि० अईः अबः (५ बु० ३ सि० म०) कअः



अडः अईः अब हैंसिद्ध

उलटप्रकारः (५ बु० ३ सि० प्र०) कअः अडः अबकः

अबडः, व अईः अबः अडईः अडबः परंतु (माति

जैम०) कअः अडः अईः अब आहेः (५ बु० ३ सि० प्र०) अ

बकः अडबः अडईः अडबः हणजे अबक

आणि अडई यांचे अडबः हीं समान गुणोत्तर आहेः

(५ बु० ३ सि० प्र०) अबकः = अडईः हैंसिद्ध

सोळावा सिद्धांत ह० १

चार रेखा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेखांचा का० चौ० दो-

न मध्य रेखांचे का० चौ० बराबर होईल आणि आद्यंत रेखांचा

का० चौ० दोन मध्य रेखांचे का० चौ० बराबर असेल, तर त्या चार

रेखा प्रमाणांत होतील.

अब, कड, ई आणि फ या चार रेखा प्रमाणांत

त आहेत. हणजे अबः कडः ईः फः अबः फः

= कडः ई होईल. अ० अबः फः = कडः ई असेल, तर अबः

कडः ईः फः होईल.

अब रेखेवर अ स्थळीं फ रेखेवर अवर अगलंब कर. तसा-

कड रेखेवर क स्थळीं ई रेखेवर अवर कड लंब करून, गब, हड

का० चौ० पुरे कर. गब आणि हड या दोन का० चौ० त अ कोनक

कोनाचे बराबर असून त्याचा बाजू व्यक्ति क्रमानें प्रमाणांत आहे

त. हणजे अबः कडः ईः फः अ० कडः अग, तेव्हां गब का० चौ०

हड का० चौ० चे बराबर आहे हैंसिद्ध.

उलटप्रकारः गब का० चौ० = हड का० चौ० आणि त्यांत

अ = < क आहे : (६ बु. १२ सि. प्र०) अबः कडः कहः हग  
अ = ईः फ हेंसिद्ध.

### सत्रावासिद्धांत. .... ह. ७७

तीन रेखा प्रमाणांत असतील, तर आद्यंतरेखांचा का. चौ. प्र  
थ्य रेखेचा वर्गाबराबर होईल. आणि आद्यंतरेखांचा का. चौ. प्र  
थ्य रेखेचा वर्गाबराबर असेल, तर त्या तीन रेखा प्रमाणांत होतील.

अ, ब आणि क या तीन रेखा प्रमाणांत आहेत. अ = ब = क  
म्हणजे अः बः बः क, तर अः क = ब होईल. अ = ब = क  
अः क = ब असेल, तर त्या तीन रेखा प्रमाणांत होतील.

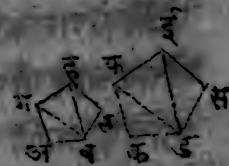
ब रेखेवर बराबर डरेखेचे. (प्रतिज्ञे प्र०) अः बः बः क अः डः क  
(६ बु. १६ सि. प्र०) अः क = ब ड परंतु ब = ड आहे : अः क  
= ब हेंसिद्ध.

उलट प्रकार. वर प्रमाणेंच ब = ड घे. तेव्हा अः क = ब ड  
असं आहे : (६ बु. १६ सि. प्र०) अः बः डः क परंतु ब = ड  
आहे : अः बः बः क म्हणजे अ, ब, क या प्रमाणांत आहेत हेंसिद्ध.

### अठरावासिद्धांत. कुल.

दिलेल्या सरळ रेखेवर दिलेल्या आकृतीशी सरूप व त्या प्रमा  
णें स्थित अशी सरळ रेखाकृतिकरावयाची.

अब रेखेवर कडईफ दिलेले चौकोना-  
वर्ग सरूप व त्या प्रमाणें स्थित असा चौको  
न काढावयाचा.



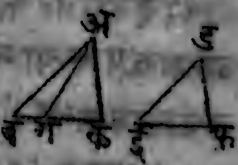
डफ सांध. (१ बु. १३ सि. प्र०) अब रेखेंत अ बिंदू जवळ क  
= < ब अग व ब बिंदू जवळ क डफ = < अग व करणा-या रेखा

कर. (१बु० २२सि० प्र०) कडफ आणि अवग हे दोन  $\Delta$  समकोन.  
 पुन्हा (१बु० २३सि० प्र०) वग रेघेशी ग बिंदूजवळ  $\angle$  डफई =  $\angle$  व  
 गह कर. तसेंच व बिंदूजवळ  $\angle$  फडई =  $\angle$  गवह कर. गव  
 ह आणि फडई हे दोन  $\Delta$  (१बु० २२सि० प्र०) समकोन आहेतः  
 (२प्र० प्र०)  $\angle$  अगव +  $\angle$  वगह =  $\angle$  कफड +  $\angle$  डफई सणजे-  
 $\angle$  अगह =  $\angle$  कफई या प्रमाणेच  $\angle$  अवह =  $\angle$  कडई आहेः  
 अवह ग चौ. कडई फ चौ. शी समकोण आहे. ग अव आणि  
 फ कड हे दोन  $\Delta$  समकोण आहेतः (६ बु० ४सि० प्र०) अगः गव  
 :: कफः फड, वगह आणि डफई हे दोन  $\Delta$  समकोण आहेत,  
 :: वगः गह :: डफः फई (६ बु० ११सि० प्र०) अमः गह :: कफः फई  
 आणि (६ बु० ४सि० प्र०) अवः वह :: कडः डई व गहः हवः :: फई  
 ईड. अवह ग आणि कडई फ हे त. चौ. समकोण असे वरसिद्ध  
 झाले. आणि आतां याचा समकोन जवळील बाजू प्रमाणांत-  
 आहेत असे सिद्ध झाले. (६ बु० ६सि० प्र०) हे सरूप आहेत. हे सि  
 द्ध या प्रमाणे पंचकोनाकृतीशी सरूप आणि त्या प्रमाणे स्थि  
 त अशी आकृती अव रेघेवर काढितां येईल.

### एकुणिसावा सिद्धांत.

जेविकोण सरूप असतात, ते आपल्या सजातीय बाजूंचा गु-  
 णोत्तराचा वर्ग मध्ये ममाणांत असतात.

अवक आणि डईफ हे दोन  $\Delta$  सरूप आहे  
 त एकाचा व कोन दुसऱ्याचे ई कोना बराबर व ग क ड  
 आहेः अवः वक :: डईः ईफ असे आहेः वक आणि ईफ  
 या दोन बाजू सजातीय आहेत, त्यात वक आणि ईफ यांचे गु



गोत्तराचे वर्गामध्ये अवक आणि डईफ हे  $\Delta$  ममाणांत होतील.

(६ बु० ११ सि० प्र०) बक आणि डईफ यांचें विभमाण पद बग काढ; तेव्हां बकः डईफः डईफः बग असें होईल. अ, ग सांध अवः बकः डईफः डईफः (५ बु० ५ सि० प्र०) परावर्तन करून, अवः डईफः बकः डईफः असें होतें, परंतु बकः डईफः डईफः बग असें आहेः (५ बु० ४ सि० प्र०) अवः डईफः डईफः बगः (६ बु० १५ सि० प्र०) अबग आणि डईफ हे  $\Delta$  परस्पर बराबर आहेत.

अरतीन पदे ममाणांत असतील तर प्रथम आणि तिसरें यांचें गुणोत्तर प्रथम आणि दुसरें यांचें गुणोत्तराचे वर्गाबराबर आहेः बक, डईफ आणि बग यांरेषा ममाणांत आहेतः बग आणि बक यांचें गुणोत्तर बक आणि डईफ यांचें गुणोत्तराचे वर्गाबराबर आहे. (६ बु० ११ सि० प्र०) बकः बगः अवक  $\Delta$  : अबग  $\Delta$ , अबक आणि अबग यांचें गुणोत्तर बक आणि डईफ यांचें गुणोत्तराचे वर्गाबराबर आहे; परंतु अबग  $\Delta$  = डईफ  $\Delta$  आहेः अवक आणि डईफ या  $\Delta$  चें गुणोत्तर बक आणि डईफ यांचां जूंचें गुणोत्तराचे वर्गाबराबर आहे हे सिद्ध.


कुर० तीन रेषा ममाणांत असल्यास प्रथम रेषेवर कसाही त्रि० काढिला व त्याशीं सरूप व त्या ममाणें स्थित असा दुसऱ्या रेषेवर त्रि० काढिला असतां, पहिल्या रेषेवर अरतिसरी रेषा, तर पहिल्या रेषेवरील त्रि० स दुसऱ्या रेषेवरील त्रि० आहे.

### विसावासिद्धांत

समान बहुकोणाकृतीचे सरूप विवक्षेण सारखे पडतात आणि



त्यात्रिःचे गुणोत्तर बहुकोणाकृतीचे गुणोत्तरा बराबर असते. व  
बहुकोणाकृतीचा सजातीय बाजूंचा गुणोत्तराचा वर्ग बराबर ब-  
हुकोणाकृतीचे गुणोत्तर असते.

अबकडई आणि फगहसल या दोन बहु  कोणाकृती सरूप आहेत. अब, फगची स-  
जातीय आहे, तर या बहुकोणाकृतीचे सरूप त्रि. समान पड-  
तात आणि त्यांचे गुणोत्तर बहुकोणाकृतीचे गुणोत्तरा बराबर  
आहे, व अब आणि फग यांचे गुणोत्तराचे वर्ग बराबर बहुको-  
णाकृतीचे गुणोत्तर आहे.

कारण बई ईक गल लह सांच अबकडई आणि फगहस-  
ल या दोन आकृति सरूप आहेत. (६ व्या. प्र.)  $\angle अ = \angle फ$  आ-  
हे आणि अबः अईः फगः फल आहे. (६ बु. १ सि. प्र.) बअई  
आणि गफल हे  $\Delta$  समकोण आहेत. (६ बु. १ सि. प्र.) ते सरू-  
प आहेत.  $\angle अबई = \angle फगल$  आणि बहुकोणाकृति सरूप  
आहेत.  $\angle अबक = \angle फगह$  आहे; तेव्हा (३ प्र. प्र.)  $\angle ईबक$   
 $= \angle लहग$  आहे. अबई आणि फगल हे दोन  $\Delta$  सरूप आहेत  
:: ईबः अबः लगः फग परावर्तनाने ईबः लगः अबः फग  
बहुकोणाकृति सरूप आहेत. अबः बकः फगः गह परावर्त-  
नाने अबः फगः बकः गह (५ बु. १ सि. प्र.) इबः लगः  
बकः गह परावर्तनाने ईबः बकः लगः गह तेव्हा ईबक, लग-  
ह हे दोन  $\Delta$  समकोण व सरूप आहेत. या प्रमाणे ईकड, लहस  
हे त्रि. समकोण व सरूप आहेत. अबकडई आणि फगह  
सल या दोन सरूपाकृतिचे सरूप  $\Delta$  समान पडले. हे सिद्ध.

अबई आणि फगल हे  $\Delta$  सरूप आहेत. यांचें गुणोत्तर (६ बु. ३९ सि. प्र०) बई आणि गल यांचे गुणोत्तराचे वर्गावरावर आहे. तसें

बईक आणि गलह या दोन  $\Delta$  चें गुणोत्तर बई आणि गल यांचे गुणोत्तराचे वर्गावरावर आहे. (५ बु. १८ सि. प्र०) अबई  $\Delta$  : फगल  $\Delta$

:: बईक  $\Delta$  : गलह  $\Delta$  असें पसिद्ध होतें कीं, बईक  $\Delta$  : गलह  $\Delta$  ::

ईफड  $\Delta$  : लहस  $\Delta$  (५ बु. १८ सि. प्र०) अबई  $\Delta$  : फगल  $\Delta$  :: अबक-

डई  $\Delta$  : फगलसल  $\Delta$ , अब आणि फगल यांचे गुणोत्तराचे वर्गावरावर अबई आणि फगल या दोन  $\Delta$  चें गुणोत्तर आहे. अब आणि फगल यांचे गुणोत्तराचे वर्गावरावर अबकडई आणि फगलसल यांचे गुणोत्तर आहे. हे सिद्ध.

१ कु. सर्व सरूपाकृति परस्पर संत आहेत. जसें त्यांचा समाधीय वा ओंचे वर्ग.

२ कु. तीन रेखा प्रमाणांत असल्यास पहिल्या रेखेस तिसरी रेखा ::

पहिल्या रेखेवरील सरळ रेखाकृति : दुसऱ्या रेखेवरील सरूप सरळ रेखाकृति.

### एकतिसावा सिद्धांत

जा सरळ रेखाकृति दुसऱ्या एका सरळ रेखाकृतीशीं सरूप आहेत, त्या परस्पर सरूप आहेत.

अ आणि ब सरळ रेखाकृति कतरळरे

खाकृतीशीं सरूप असतील, तर अ आणि ब या सरूप होतील.

अ आणि ब सरूप आहेत. (६ बु. २० सि. प्र०) समकोण आहेत, व

त्यांचा समकोणाचा बाजू प्रमाणांत आहेत. तसेंच, क म म म

आहेत, त्यांचा समकोणाचा बाजू ममाणांत आहेतः (१ बु० ४ सि०  
म०) अ आणि व आकृति सरूप आहेत हे सिद्ध.

### वेविसावा सिद्धान्त.

जा चार सरळ रेखां परस्पर ममाणांत असतात, त्यांचर सजातीय  
सरूप आकृति काढिल्या असता त्या परस्पर ममाणांत असतात. आ-  
णि चार सरळ रेखांवर काढिलेल्या सरूप आकृति ममाणांत असल्यास-  
त्या चार रेखां परस्पर ममाणांत असतात.

अब, कड, ईफ आणि गह या चार रेखां परस्पर ममाणांत आहेत. ह्या जे अबः कडः ईफः गहः  
तर अब आणि कड या रेखांवर स अब आणि ल  
कड तसेंच ईफ आणि गह रेखांवर मफ आणि नह या सजातीय  
सरूप आकृति काढिल्या आहेत, तर स अबः ल कडः मफः नह होईल.  
(६ बु० ११ सि० म०) अब, कड रेखांचें तिसरें पद क्ष रेख काढ, आणि  
ईफ, गह यांचें तिसरें पद ओ रेख काढ. अबः कडः ईफः गह अ-  
सें आहेत. (१ बु० ४ सि० म०) कडः क्षः गहः ओः. (१ बु० ११ सि० म०)  
अबः क्षः ईफः ओ परंतु (६ बु० २० सि० २ कु० म०) अबः क्षः स-  
अबः ल कड आणि ईफः ओः मफः नहः स अबः ल कडः म-  
फः नह हे सिद्ध.

उलट मकार. (६ बु० १२ सि० म०) अब, कड आणि ईफ यांचेच  
वर्षे पद पर काढ, आणि (६ बु० १० सि० म०) मफ जी किंवा नह  
शी सरूप चार आकृति पर रेखांवर काढ, आतां अबः कडः ईफः  
पर असें आहे, अ अब आणि कड रेखांवर सरूप व सारख्या सि-  
व स अब आणि ल कड तरळ रेखां कृति काढिल्या आहेत, त्या-

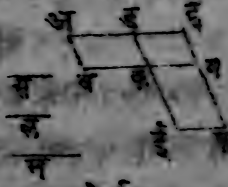
च ईफ आणि पर यांवर मफ आणि शर सहा कृतिकादि  
 ल्या आहेत. स अबः लकडः मफः शर आणि (मतिज्ञेयः)  
 स अबः लकडः मफः नहः मफ चैनह आणि शर यांची ममा  
 न गुणोत्तर आहे. (५ बु० ३ सि० य०) नहः शर आहे. गहः पर  
 अबः कडः ईफः पर अ० गहः हें सिद्ध.

### तेविसावा सिद्धांत.

समकोण स० चौ० चें गुणोत्तर त्यांचा बाजूंचा गुणोत्तराचा गुणा  
 काराबराबर असतें.

अक आणि कफ असे दोन समकोण स०

चौ० आहेत, व अक चा बकड = कफ चा  
 ईकग आहे. त्यास अक, कफ यांचें गुणो



त्तर त्यांचा बाजूंचा गुणोत्तराचा गुणाकारा बराबर होईल.

बक, कग या बाजू एके सरळरे घेंत येतील असे ते स० चौ० तेव (१ बु०  
 १४ सि० य०) क स्थळावरील कोन परस्पर बराबर आहेत. दुसऱ्या चौ०  
 पूर्णकर. एकस रेषेचे आणि (६ बु० १३ सि० य०) बक, कग आणि मया  
 चें चवथें पदल काढ. तसें बडक, कई आणि ल यांचें चवथें पद म-  
 काढ. तेव्हां स आणि ल रेघांचें गुणोत्तर बग आणि कग यांचें गुणो  
 त्तरा बराबर आहे. बल आणि म यांचें गुणोत्तर डक आणि कई या  
 चें गुणोत्तराचे बराबर आहे. स आणि म यांचें गुणोत्तर स आणि  
 ल व ल आणि म यांचें गुणोत्तराचें गुणाकारा बराबर आहे. स ला  
 णि म यांचें गुणोत्तर क व आणि क ग व डक आणि कई यांचें गु  
 णोत्तराचें गुणाकारा बराबर आहे. (६ बु० १३ सि० य०) बक, कगः अक  
 कडः परंतु बकः कगः सः लः (१ बु० १३ सि० य०) सः लः अकः कडः



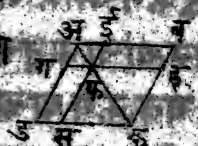
हुकः कडः कडः कडः परंतु डकः कडः लः म असें आहे : लः  
मः कडः कडः सः लः अकः कडः लः मः कडः कडः असें सि-  
द्ध झाले : (१ बु० सि० प्र०) सः मः अकः कडः (वरसिद्ध के० मः) सः  
आणि म यांचे गुणोत्तर अक आणि कड यांचे गुणोत्तरांचे गु-  
णाकारा बरा बरा आहे : अक आणि कड यांचे गुणोत्तर त्यांचा वाचू-  
न्या गुणोत्तरांचा गुणाकारा बरा बरा आहे. हें सिद्ध.

कुरः दोन चतुः प्रमाणांतील प्रदरेखा असल्यास, त्यांचा सरूप प-  
दांचे का० चो० हे प्रमाणांत असतात. (१ बु० सि० प्र०) ह० ७५

### चविसा वासिद्धान्त

स० चो० न त्याची कर्णरेषा जातून जाते असे जे स० चो० पडतात, ते  
मोठ्या स० चो० शी व परस्पर शोभां सरूप असतात.

अबकड स० चो० ची कर्णरेषा अक आहे आणि ती ईग, हस या दोन स० चो० तून जात्ये, त्यास ते स०



चो० अबकड स० चो० शी व परस्पर शोभां सरूप होतील.

(१ बु० सि० प्र०) अबकड = अगक आणि अबकड = अईक  
आहे (१ बु० सि० प्र०) अबकड आणि ईफग हे मध्येकीं ड अब  
या बरा बरा आहेत : अबकड = ईफग आहे : बड आणि ईग स०  
चो० समकोण आहेत, अबकड आणि अईक हे दोन समकोण आ-  
हेत. (६ बु० सि० प्र०) अबः बकः अईः ईफः, स० चो० चा समोरा  
समोराचा वाचू परस्पर बरा बरा असतात : अबः अडः अईः अग  
वडकः बकः गकः ईफ आणि डकः डअः फगः गअ वड आणि  
ईग यांचा बरा बरा कोनाचा वाचू प्रमाणांत आहेत : (६ बु० सि० प्र०)  
ते परस्पर सरूप आहेत तसेच बड आणि हस हे सरूप आहेत.

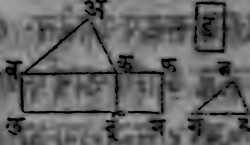
ईग आणि हसहे स०चौ० बडूचीं सरूप आहेतः (६ बु० ११ सि० अ)  
हसस०चौ० ईग स०चौ० शीं सरूप आहे हे सिद्ध

### पंचविसावासिदांत.

दिलेल्या दोन सरळरेषाकृती पैकीं एका आकृतीशीं सरूप व दुसरे  
आकृतीशीं समान अशी एक सरळरेषाकृति काढावयाची.

अबक आणि ड अशा दोन सरळरेषाकृ

ति आहेत, तर अबक शीं सरूप व ड शीं स



मान अशी एक आकृति काढावयाची.

(१ बु० १५ सि० कु० अ) बकरे घेवर अबक शीं समान बई स०चौ० कर

(१ बु० १४ सि० अ) कई रे घेवर ड शीं समान बजावा फकई कर

बल होईल असा कम स०चौ० कर. (६ बु० १३ सि० अ) अबक आणि ड

यांचें मध्यपद गहरे घकाढ. आणि तिजवर (६ बु० १० सि० अ) अबक

आकृती शीं सरूप सगह आकृति काढ. बक, गह, कफ यांना नावांत आ

हेत, म्हणजे बकः गहः गहः कफ (६ बु० २० सि० अ कु० अ) बकः

कफः अबकः सगह परंतु (६ बु० ११ सि० अ) बकः कफः बईः

ईफ (१ बु० १४ सि० अ) अबकः सगहः बईः ईफ आतां अबक आ

कृति बई शीं समान आहे, व सगह आकृति ईफ शीं समान आहे ईफ

आकृति ड आकृती वरावर आहेः सगह, ड शीं समान आहे, आणि ती

अबक शीं सरूप आहेः अबक शीं सरूप व ड शीं समान अशी स-

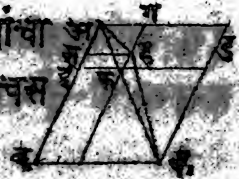
गह आकृति झाली हे सिद्ध.

### सविसावासिदांत.

जर दोन सरळ स०चौ० स एक कोन ता पारण असेल व ते ता स-

स्थित असतील, तर त्यांचा कर्ण रेखा एक सरळरेषेत येतील.

अब कड आणि अईफग हे संचौ आहेत त्यांचा  
 (उ) अब साधारण आहे, तर त्यांचा कर्ण रेखा एकेच स  
 र्गोर्ध्व येतो ल.



अक कर्ण रेखा बिंदू तून भात नसेल तर ह बिंदू तून जाते असें  
 मानून ह बिंदू तून अग गी ह स स कर. (६ बु. २४ सि. अ.) बड आ-  
 णि सग सरूप आहेत. (६ व्या अ.) अडः अबः अगः अस, अ-  
 बकड आणि अईफग सरूप आहेत. अडः अबः अगः अई  
 (६ बु. २४ सि. अ.) गअः अईः गअः अस तेव्हा (६ बु. २४ सि. अ.)  
 अस = अई, परंतु तुकडा सर्व वस्तु वरावर होतो हें अशक्य. अ-  
 बकड संचौची कर्ण रेखा अहक रेघेत नाही. अफ रेघेतच आ-  
 हे हें सिद्ध.

### सत्ताविसावा सिद्धांत.

रेघेचे कडे दोन भाग केले असता त्यांचा का. चौ. अर्ध रेघेचा तो  
 रसापेक्षा लहान असतो.

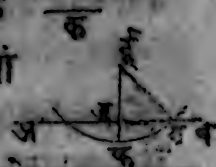
अब सरळ रेघेचे अड आणि बड हे दोन विषम अ. क. उ. व  
 भाग केले आणि अक, बक हे दोन सम भाग केले तर अड. बड  
 ह्या का. चौ. अक हून उणा होईल.

(६ बु. २४ सि. अ.) अड. बड + कड = अक यावरून स्पष्ट होतें कीं,  
 अड. बड, अक हून लहान आहे हें सिद्ध.

### अष्टाविसावा सिद्धांत.

दिलेल्या रेघेचे असे दोन भाग कर कीं, त्यांचा का. चौ. दिलेल्या क्षेत्र  
 चा बराबर होईल परंतु दिलेले क्षेत्र दिलेल्या रेघेचा अर्धा चावर्ग  
 पेक्षा जास्त असू नये.

अब दिले की रेखा आहे, क रेखेचे चौरस दिलेले क्षेत्र आहे, तर अब रेखेचे असे दोन खंड पाडकी, सां चाकाची. क रेखेचे वर्गाबराबर होईल.



अब रेखेड स्थळीं दुभाग आणि त्या स्थळीं कचे बराबर अब रेखेवर डईलंब कर आणि डई, फ पर्यंत वाढीव अशी की, डई = अड होईल. नंतर डई विज्येने एक वर्तुळ कर. तें अब रेखेस ग स्थळीं छे दील. ग, ड सांफ. (१ बु. ५ सि. प्र.) अडई = अग. बग + डग परंतु अ ड = डई = डई आहे. डई = अग. बग + डग (१ बु. ४० सि. प्र.) डई = डई + डग तेव्हा डई + डग = अग. बग + डग यांत डग साधारण वजा जातां डई = अग. बग परंतु डई = क आहे. क = अग. बग म्हणजे अब रेखेचे अग आणि बग हे डई छेले खंड झाले. हें सिद्ध.

### एक गुणतिसावा सिद्धांत.

एक रेख अशी वाढीव की, वाढविल्या सुद्धां सर्व रेखाणि वाढविला खंड यांचा का. चौ. दुसऱ्या दिलेल्या रेखेचा वर्गाबराबर होईल.

अब आणि क या दोन रेखा दिल्या आहेत, तर — क अब रेखेड त की वाढीव की, अग. बग = क होईल. फ अ ड ब ग

अब रेखेड स्थळीं दुभागून, तिचे चोबदावर घ स्थळीं क रेखेबराबर डईलंब कर. आणि ड, ड सां धून त्या विज्येने ड मध्य क मून, फ डई ग ० कर. अब रेखेपरिपास ग स्थळीं मिळे पर्यंत वाढीव. (१ बु. ६ सि. प्र.) डग = अड. बग + बड डग = डई आहे. डई = अग. बग + बड परंतु (१ बु. ४० सि. प्र.) डई = बड + बड. बड + बड = अग. बग + बड, साधारण बड वजा करितां बड = अग



\* बग परतु बई = कौ आहे. अग बग = कौ हे सिद्ध.

### तिसावा सिद्धांत.

दिलेल्या रेघेचे अंत्य मध्य प्रमाणाचे खंड करावयाचे.  
अब दिलेली रेघ आहे, हीचे अंत्य मध्य प्रमाणा  
चे खंड करावयाचे.



अब रेघेवर बक वर्ग कर. (६ बु. २९ सि. प्र.) अक  
रेघेदु पर्यंत वाटीव. अशी की, कड. अड = अक होईल. अड = अई  
करून डफ का. चौ. पूर्ण कर कड. अड = अक. डफ का. चौ. = बक  
चौ. स आहे. दोन्ही पेट्यातून अफ का. चौ. वजा कर, तेव्हा डई वर्ग  
बफ का. चौ. वेबराबर आहे. परतु बफ का. चौ. अब, बई रेपांनी  
झाली आहे. (६ बु. १० सि. प्र.) अब आणि बई यांचे मध्य पद अई  
आहे. म्हणजे अब. अई. अई. बई नेळा (६३ व्या. प्र.) अब रेघेचे  
ई स्थिती अंत्य मध्य प्रमाणाने खंड पडते. हे सिद्ध.

### एकतिसावा सिद्धांत.

का. त्रि. त. कर्णावर सरळ रेघाकृती काढून, तिचीं सरूप त्या प्रमाणे  
अशा दुसऱ्या दोन वाजुंवर सरळ रेघाकृती काढल्या; तर त्यांची वेरी  
जे कर्णावरील आकृती बराबर होईल.



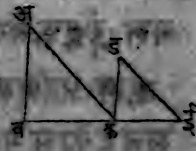
अब क का. अब क कर्णावरील सरळ रेघाकृती -  
ची सरूप व त्या प्रमाणे स्थित अशा अब, अक या  
वाजुंवर काढिलेल्या आकृतींची वेरी ज त्यापूर्वी आकृती बराबर होईल.  
अई लंब कर. (६ बु. २९ सि. प्र.) ब अड आणि अक ड हे  $\Delta$  अबक  
 $\Delta$  ची व परस्परांची सरूप आहेत. (६ बु. २९ सि. प्र.) बक अब.  
अब बडे बक, अब आणि बडे प्रमाणात आहेत. (६ बु. २९ सि. प्र.)

कु.म.) बकः बडः बक वरील आकृतीसः अब वरील आकृति,  
 व्यस्तानें बडः बकः अब वरील आकृतीसः बक वरील आकृ  
 ति. याप्रमाणें डकः बकः अक वरील आकृतीसः बक वरील  
 आकृतिः बड + डकः बक अब वरील आकृति + बक वरील  
 आकृतीसः बक वरील आकृति; परंतु बड आणि डक यांची वेरी  
 ज बक आहे. अब आणि अक यांवरील आकृतीची वेरी ज बक  
 वरील आकृती बराबर आहे. हे सिद्ध.

### वक्तिसावासिद्धांत

जा दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजूंशीं प्र  
 माणांत आहेत ते, त्यांचा त्या सजातीय बाजू परस्परान्शीं स. होती  
 ल अशा तऱ्हेने लावून ठेविले असता, त्यांचा तिसऱ्या बाजू ही ए  
 का सरळ रेषेंत येतील.

अबक आणि डकई या दोन  $\Delta$ त एकाचा अब,  
 अकबाजू दुसऱ्याचा डक, डई बाजूंशीं प्रमाणांत  
 आहेत म्हणजे वअः अकः डकः डई आणि हे दोन  $\Delta$  क कोनाज  
 बळ असले लावून ठेवकीं, अबशीं डक आणि अकशीं डई स. होती  
 ल. तेव्हां बक आणि कई या दोन बाजू एकच सरळ रेषेंत येतील.

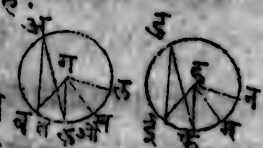


अब, डक आणि अक, डई स. आहेत. (१ बु. २९ सि. म.)  $\angle$ अ =  
 $\angle$ अकड आणि  $\angle$ अकड =  $\angle$ डः (१ म. म.)  $\angle$ अ =  $\angle$ ड आहे आ  
 णि अब, अक या बाजू डक, डई यांशीं प्रमाणांत आहेत. (६ बु.  
 ६ सि. म.) अबक आणि डकई हे दोन  $\Delta$  परस्पर समकोण आहेत व  
 $\angle$ अकई आहे व  $\angle$ अ =  $\angle$ अकड. सर्व  $\angle$ अकई =  $\angle$ अ +  $\angle$ व आहे.  
 या दोन ही पेथ्यांत  $\angle$ अकव मिळविल्या असता  $\angle$ अकई =  $\angle$ अकव

= <अ+<व+<अकब आहे, परंतु (१ बु० ३२ सि० म०) <अ+<व+  
 <अकब=२का० ∴ <अकई+<अकब=२का० तेव्हा (१ बु० ११ सि०  
 म०) बक आणि कईमिळून एक सरळ रेषा आहे. हे सिद्ध.

### तेति सावासिद्धान्त.

समान वस्तुबात मध्यकोन किंवा परिघकोन यांचे गुणोत्तर, तेजा-  
 कौसावर असतात त्यांचा गुणोत्तराबराबर आहे, व त्या कौसांचे-  
 गुणोत्तर सेकतोरचे गुणोत्तराबराबर आहे.

अबक आणि इईफ या दोन समान ० त   
 बगक आणि इईफ हे मध्यकोन व व अक आ  
 णि इईफ हे दोन परिघकोन बक आणि इईफ कौसावर असतील तर  
 बक:ईफ::<बगक:<ईहफ::<वअक:<ईडफ:: बगक सेकतां  
 रास:ईहफ सेकतोर होईल.

कस आणि सल हे कौस मध्ये की बक कौसा एवढे कर, आणि फम,  
 मन हे कौस मध्ये की ईफ एवढे कर, गस गल हस हन सांध बक,  
 कस आणि सल हे कौस बराबर आहेत ∴ (१ बु० ७ सि० म०) या कौसां  
 नीं मापने कोन बगक, कगस, सगल हे बराबर आहेत ∴ बल कौस  
 बक कौसाचा जितके पट मोठा आहे, तितके पट <बगल, <बगकचा  
 आहे. या प्रमाणे <ईन कौस ईफ कौसाचा जितके पट आहे, तितके पट  
 <ईहम, <ईहफ चा आहे. बल कौस ईन कौसाचा बराबर, मोठा,  
 अलहान असल्यास <बगल <ईहन चा अनुक्रमे बराबर, मोठा अं-  
 लहान होईल ∴ (६ व्या म०) बक:ईफ::<बगक:<ईहफ (३ बु०  
 २० सि० म०) <बगक, <वअक चा दुप्पट आहे. तसें <ईहफ <ईडफ चा  
 दुप्पट आहे ∴ बक:ईफ::<वअक:<ईडफ हे सिद्ध



आना बक कौंस ईफ कौसः बगक सेक तोरासः ईहफ सेक तो  
 र दोईल बक कस सांध बक कस सा दोन कौंसांत हस आणि ओ  
 दीन बिंदु पेऊन बक्ष क्षक, क ओ ओ स सांध (१ बु ४ सि ३)  
 बगक आणि कगस हे दोन एक रूपः बक पाया = कस पाया आ  
 हे, बक कौंस = कस कौंस आहे. ब अक आणि क अस हे कौंस व  
 रावर आहेत. < बक्षक = < क ओस आहे. बक्षक ० खंडक ओ  
 स ० खंडाशी चरूप आहे, आणि हे दोन खंड समान रेषांवर आहेत  
 :: (१ बु ४ सि ३) ते परस्पर बरोबर आहेत. बक्षक ० खंड =  
 क ओस ० खंड आहे. बगक सेक तोर = कगस सेक तोर आहे.  
 या प्रमाणे च सगळ, बगक आणि कगस हे सेक तोर स बराबर आ  
 हेत. असेंच ईहफ, फहम आणि महन हे सेक तोर परस्पर बराबर  
 आहेत. बल कौंस क व चाजित के पट आहे, तितके पट बगल सेक  
 तोर बगक सेक तोराचा आहे. तसेंच ईन कौंस ईफ चाजित के पट  
 आहे, तितके पट ईहन सेक तोर ईहफ सेक तोराचा आहे. बक  
 कौंस ईफ कौंसाशी जा प्रमाणाने आहे, त्याच प्रमाणाने बगक सेक  
 तोर ईहफ सेक तोराशी आहे. हे सिद्ध.

१ कु ० एकाच वर्तुळाचे किंवा समान वर्तुळांचे सरूप सेक तोर सग  
 ल असतात.

२ कु ० वर्तुळमध्याजवळ चा कोनास जर चारका तर तो कोन जा  
 कौंसावर आहे त्या कौंसास वर्तुळाचा परिघ.

ब सिद्धांत.

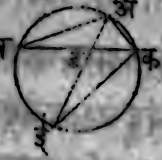
ह ० ६४

जी रेषा त्रिकोणाचा कोन तादी कोन दुभागिते तिचा वर्ग आणि त्या  
 घेने केदले पायाचे दोन खंडांचा का ० चौ ० दुसऱ्या दोन गाजूंचे का ० चौ ०



बराबर आहे.

अबक  $\Delta$  त अड रेघ अ कोनास दुभागिते,  
तर अड + बड - कड = बक अब होईल.



अबक  $\Delta$  भोवती (१ बु० १ सि० प्र०) अबईक  $\odot$  कर, अड परिघाव  
र ई पर्यंत वाटीव, आणि क, ई सांध.  $\angle$  बअड =  $\angle$  डअक आणि  
(१ बु० २१ सि० प्र०)  $\angle$  ब =  $\angle$  ई तेव्हा अबड, अईक हे दोन  $\Delta$  समकोण  
आहेत. (६ बु० ४ सि० प्र०) अब: अड :: ईअ: अक (६ बु० १६ सि०  
प्र०) अब अक = अड ईअ (१ बु० ३ सि० प्र०) अड अई = अड +  
अड - डई (१ बु० ३५ सि० प्र०) अड - डई = बड - कड आहे. बअ अ  
क = अड + बड - कड हे सिद्ध.

कसिद्धांत. . . . . ह० ६४

त्रिकोणाचा शिरकोना पासून पायावर लंब केला असता, तो लंब  
आणि त्रिकोणाचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास यांचा का. चौ. दुसऱ्या  
दोन बाजूंचे का. चौ. बराबर आहे.

अबक  $\Delta$  चे बाहेरील  $\odot$  चा व्यास अई आणि  
बक वाजूवर समोरचा अ कोना पासून अड लंब  
केला आहे, तर अब अक = अड अई होईल.

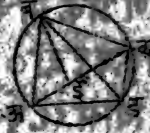


ईक सांध. अबड आणि अकई या दोन  $\Delta$  त  $\angle$  डका =  $\angle$  अकई  
आहे, कारण (१ बु० २१ सि० प्र०) हा ही का. च आहे (१ बु० २१ सि० प्र०)  
 $\angle$  ब =  $\angle$  ई. अबड आणि अकई हे दोन  $\Delta$  परस्पर समकोण आहेत.  
(६ बु० ४ सि० प्र०) बअ: अड :: ईअ: अक (६ बु० १६ सि० प्र०)  
अब अक = अड अई हे सिद्ध.

## ड सिद्धान्त

वर्तुळांतील चौ. चा दोन कर्णांचा चौ. त्या चौ. चा समोरासमोर  
चा बाजूचा चौ. बराबर आहे.

वर्तुळांत अवकड चौबाजू आहे, जाचा अक  
आणि बड कर्णरिषा आहेत; तर अक. बड = बक.  
अड + अब. डक होईल.



इईरेबकर अशी की, <अबई = <डबक होईल. आतां <अबई  
आणि <कबड या दोन कोनांत <ईबड मत्सेकी मिळीवतल्या <अ  
बड = <ईबक (२बु. २१ सि. म.) <बडअ = <बकअ. अबक  
आणि कबई हे दोन समकोण आहेत. तसेंच अबई आणि डबक  
हे दोन समकोण. (६बु. ४, १६ सि. म.) बक. अड = कई. बड  
आणि अब. डक = अई. बड आहे. आतां या दोनही समीकरणांची  
वेरीज घेऊन बक. अड + अब. कड = कई. बड + अई. बड परंतु  
कई. बड + अई. बड = अक. बड आहे. बक. अड + अब.  
डक = अक. बड हे सिद्ध.

## ई सिद्धान्त

वर्तुळ खंडाचे दोन समान भाग करून, छेदन बिंदू व पायांची दो  
न टोकें यांपासून वर्तुळाचा परिघांतोल कोणत्याही एका बिंदू पर्यंत  
रेषा केल्या असता पायाचा दोन टोकांपासून काढिलेल्या दोन रेषा  
ची वेरीज आणि छेदन बिंदू पासून काढिलेल्या रेषा यांचें गुणोत्तर व  
वर्तुळ खंडाचा पाया आणि वर्तुळ खंडाचा अर्धाचा पाया यांचे गु  
णोत्तरा बराबर आहे.

अबड० चा अबखंड आहे आणि त्याचे क स्थिती दोन समान

न भागकेले आहेत; अ, क, व या तीन बिंदू पासून ह  
बिंदू पर्यंत अड, कड आणि वड रेखाकडिला आहेत  
त, त्यास अड + वड आणि कड यांचे गुणोत्तर अव  
आणि अक यांचे गुणोत्तराबराबर आहे.



अक वड हा ० तः आहो, आणि त्याचा अव, कड कर्ण रेखा आ  
हेत, त्यास (६ बु. ३ सि. म.) अड. वक + वड. अक = कड. अव;  
परंतु अक = वक आहे. अड. अक + वड. अक = कड. अव.  
(१ बु. १ सि. म.) अड. अक + वड. अक = (अड + वड) . अक  
= कड. अव. (६ बु. १ सि. म.) अड + वड : कड :: अव : अक हे सिद्ध.

### फसिद्धांत

वर्तुळाचा व्यासांत असे दोन बिंदू घेतले की, ते दोन बिंदू आणि वर्तुळ  
मध्य यांचा मधील जे खंड पडतील त्याचा क. चौ. अर्धव्यासाचा व-  
र्गबराबर होईल, तर त्या दोन बिंदू पासून वर्तुळ परिघांतील कोणत्या  
ही बिंदू पर्यंत रेखाकडिला तर त्यांचे गुणोत्तर पूर्वीक दोन ही बिंदू व परि-  
घ यांचे मध्य जे व्यासाचे खंड पडतात, त्यांचा गुणोत्तराबराबर होईल.

अवक एक ० आहे, आणि त्याचा ड मध्य आहे.

क अ व्यास वाटवून, त्यांत ई आणि फ बिंदू घेत



ले आहेत की, डफ. ईड = अड. होईल. फ आ-  
णि ई बिंदू पासून परिघांतील व बिंदू पर्यंत फव आणि ई व रेखा  
कडिला आहेत, तर वफ. वई :: फअ : अई होईल.

वड सांध. (मतिज्ञेय) फड. ईड = अड. आहे व अड = वड आ-  
हे, त्यास (६ बु. १ सि. म.) फड. वड : वड : डई आहे. (६ बु. ६ सि.  
म.) फड व आणि ईड व हे दोन समकोण आहेत. (६ बु. १ सि. म.)

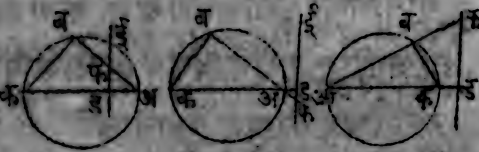


फवः वडः॥ बईः ईडः (५ बु० ५ सि० म०) फवः बईः॥ वडः ईडः, वडः =  
अडः आहे॥ फवः बईः॥ अडः ईडः, फडः अडः॥ अडः डई हें वतुः  
प्रमाण आहे. (५ बु० ५ सि० म०) फअः अडः॥ अईः बई परावर्तनानें  
फअः अईः॥ अडः अई, फवः बईः॥ अडः डई असें वरसिद्ध केले  
आहे. (५ बु० ५ सि० म०) फवः बईः॥ फअः अई हें सिद्ध.

### ग सिद्धांत.

वर्तुळाचा व्यासाचा एका टोंका पासून ज्या केली आणि ज्या व्यासाचा  
स आंतीक किंवा बाहेरील अंगानें छेदणारा असा व्यासावर एक लंब-  
केला, तर व्यास व व्यासाचा टोंक पासून ज्या केली आहे त्या आंगाच्या  
गाचा खंड याचा का० चो० ज्या आणि तिचा अनुरूप खंड यांचे का० चो०  
बराबर आहे.

अबक ० चा व्यास अक  
आहे, आणि त्याचा अ टोंका



पासून अब ज्या केली आहे, व व्यासावर डई लंब केला आहे तो फ-  
स्थळीं ज्येस छेदितो, त्यास अक० अड = अब० अफ० आहे.

व, क सांध. < अड फ का० आहे व (३ बु० ३१ सि० म०) < व का० आहे.  
व अक आणि फ अड या दोन  $\Delta$  त < व = < अड फ, < व अक = < फ  
अडः (१ बु० ३२ सि० ३ कु० म०) हे दोन  $\Delta$  समकोण आहेतः (६ बु० ४ सि०  
म०) अबः अकः॥ अडः अफः (६ बु० १६ सि० म०) अक० अड =  
अब० अफ हें सिद्ध.

कुर० अबक  $\Delta$  ची अर्ध परिमितिक म अ० कन याचे बराबर आहे  
हे त्यास त्याचे बराबर ह मानिला, तर कई खंड ह- अब पाया याचे  
बराबर आहे अई खंड ह- अक बाजू याचे बराबर आहे अम

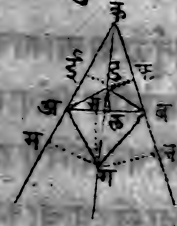


गंध द - अक बाधं बराबर आहे.

## ह सिद्धांत.

त्रिकोणाचा पाया कडील दोन कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा जास्थ  
कीं मिळतात तो बिंदु व दोन बाजू वाटवून पायाचा बाहेरील कोनां  
स दुभागणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु आणि शिरो बिंदु हे एका सर  
ळरेषेत येतील. आणि ती सरळ रेषा शिरोकोनास दुभागील.

अबक  $\Delta$  चा पाया कडील अ आणि ब को  
नांस दुभागणाऱ्या अड आणि वंडु यारेषा  
उस्थळीं परस्परांस मिळतात. अक, बक वा  
टवून पायाचे बाहेरील अ आणि ब कोनास दु



भागणाऱ्या अग आणि वग या रेषांची परस्परांस मिळतात, तर—  
ग आणि ड हे दोन बिंदु व क शिरोबिंदु हे एकेच सरळ रेषेत येतील.  
यती रेषा क कोनास दुभागील.

डई, डफ, डल, गम, गस आणि गन हे लंबकर.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अडई} \Delta \text{अडल} \Delta \text{शीं} \\ \text{वडफ} \Delta \text{वडल} \Delta \text{शीं} \\ \text{अमग} \Delta \text{असग} \Delta \text{शीं} \\ \text{बमग} \Delta \text{बनग} \Delta \text{शीं} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{डई} = \text{डल} \\ \text{डल} = \text{डफ} \\ \text{गम} = \text{गस} \\ \text{गस} = \text{गन} \end{array} \therefore \left. \begin{array}{l} \text{डई} = \text{डल} \\ \text{डल} = \text{डफ} \\ \text{गम} = \text{गन} \end{array} \right\}$$

(१) कसि (म) कईड  $\Delta$  कफड  $\Delta$  शीं, कमग  $\Delta$  कनग  $\Delta$  शीं एक  
रूपः <ईकड = <फकड आणि <मकग = <नकग तेव्हां <कचे  
कड, कग रेषांनीं बराबर दोन भाग होतात, यावरून कड रेषाकग  
रेषेत आहे हे सिद्ध.

## लसिद्धान्त

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल बाजूंचा परिमितीचें अर्धवर्तें अर्ध आणि पाया  
यांची वजावाकी यांचा का० चो० व परिमितीचें अर्ध इतर बाजू यांचा  
वजावाक्यांचा का० चो० यांचे मध्य प्रमाण आहे.

(ह सिद्धान्ताची आकृति)

अबक  $\Delta$  त बाजूंचे परिमितीचें अर्धहू असेल तर हू (ह-अब)  
आणि (हू-अक) (हू-बक) यांचें मध्य प्रमाण त्या  $\Delta$  चें क्षेत्रफल आ  
हे.

(१ बु० ११ सि० प्र०) ईड, मग यांचीं स० आहे. कई: ईड :: कम: मग  
आणि कम: कम :: डई: डई (१ बु० ११ सि० कु० प्र०) कई: कम:  
ईड: कम: कम: ईड: मग: ईड, अबक  $\Delta$  - अबड  $\Delta$  + अडक  $\Delta$   
+ कडब  $\Delta$  आहे (बु० ११ सि० प्र०) अडब  $\Delta$ , अडक  $\Delta$  आणि कड  
ब  $\Delta$  हे अब-डल, अक-डई आणि बक-डफ या तीन का० चो० चे  
अर्धावरोबर आहेत, परंतु हीं सर्व अर्धें मिळून कम-ईड का० चो० व  
रावर आहेत.  $\angle ईअल + \angle मअस = २का०$   $\angle ईअड + \angle मअग =$   
 $१का०$  (१ बु० १२ सि० प्र०)  $\angle अगम + \angle मअग = १का०$   $\angle ईअड$   
 $+ \angle मअग = \angle अगम + \angle मअग :: \angle ईअड = \angle अगम$ , ई  
आणि म या बिंदू जवळचे कोन का० आहेत: अगम आणि ईअड  
हे  $\Delta$  सरूप आहेत, तेव्हां अई: ईड :: मग: मअ :: अई: अई = ईड:  
मग :: पूर्वी सांगितलेले चतुःप्रमाण कम: कई: अबक :: अबक:  
अग-अई :: हू (ह-अब): अबक :: अबक: (ह-अक) (ह-अब)  
हें सिद्ध.

टीप. त्रिकोणाचा तीन बाजूं पासून क्षेत्रफल या पासून काढितां येते.

## सहाव्यावुकाचे प्रश्न.

- १ तीन समांतर रेखांस जारे पाडले दितात, त्यांचे खंड प्रमाणांत असतात.
- २ जर एका रेखेचे असे तीन भाग केले कीं, मधला खंड वतीं सर्वे रेखांचा का. चौ. अंकील दोन खंडांचा का. चौ. बराबर असेल, तर ती रेखा गायन प्रमाणांत विभागिली जाईल.
- ३ वर्तुळाचा पंगिघांतील कोणत्याही बिंदू पासून जर विज्येवर लंब केला, आणि त्याच बिंदू पासून त्या वर्तुळास स्पर्श रेखा केली, ती विज्यामिळत पर्यंतचा द्वि. शि. ; तर मध्य बिंदू पासून लंबा पर्यंत अंतर, व मध्य बिंदू पासून स्पर्श रेखा छेदन बिंदू पर्यंत अंतर, या दोहोंचे मध्य प्रमाण विज्या जाईल.
- ४ जर एका ज्येवर निरनिराळ्या वर्तुळांचे केंद्र असतील, तर त्या ज्येचा एका दोवटा पासून केंद्रांपर्यंत रेखा केलेल्या तर त्या रेखांमधील केंद्रांचे खंड प्रमाणांत होतील.
- ५ एका सरळ रेखेचे गायन प्रमाणांत खंड कर.
- ६ अशी एका रेखा कर कीं, दिलेल्या दोन रेखांतून पहिल्या रेखेस जर दुसरी रेखा, तर पहिल्या रेखेचा वर्गास इच्छित्या रेखेचा वर्ग होईल.
- ७ एका रेखा काढ अशी कीं, दिलेल्या दोन रेखांतून पहिली सजर इच्छितरी रेखा, तर पहिलीचा वर्गास दुसरीचा वर्ग होईल.
- ८ सांगितलेले कोनाचा असा एक त्रिकोण पाडावयाचा कीं, तो सांगितलेले कोना बराबर होईल.
- ९ एक बि. असा छेद कीं, त्याचाशीं तो समकोन होईल, आणि त्याचा बाजू दिलेल्या प्रमाणांत होतील.
- १० दिलेल्या बिंदू पासून वर्तुळांत अशी ज्या कर कीं, जिचे खंड दिले

ले प्रमाणांत होतील.

११ पाया, उंचो आणि दोन बाजूंचें प्रमाण या पासून त्रि० करावयाचा.

१२ कोणत्या ही त्रि० चा पाया कडील कोनां पासून समोरचा बाजूंस दुभागणाऱ्या रेषाके त्या, तर त्या परस्परांस २:१ या प्रमाणानें छेदितील.

१३ कोणत्या ही त्रि० चा पायाशीं स० रेषाकेली; आणि पायाकडील कोनां पासून त्या रेषेचीं शेवटें सांधिलीं; व त्या रेषांचा छेदन बिंदु बाशिरो बिंदु सांधणारी रेषा पायास दुभागिते. व गायन प्रमाणांत छेदिली जाते.

१४ तीन रेषा परस्पर प्रमाणांत असतील, तर पहिली सजर निसरी, तर पहिली आणि दुसरी यांचे अंतराचे वर्ग स, दुसरी आणि तिसरी यांचे अंतराचा वर्ग होईल.

१५ एका वर्तुळांत दोन ज्या परस्परांस छेदितात त्यां पासून जो कोन होतो, तो त्या दोन ज्यांचे अंतर कोनांचे वेर नेचे अर्धांनें मापिला जातो. आणि वर्तुळाचे बाहेर ज्या परस्परांस छेदितात त्या पासून जो कोन होतो तो दोन अंतर कोनांचे वजाबाकीचे अर्धांनें मापिला जातो. स० १५

१६ कोणत्या ही त्रि० चा शिर कोनाचा बाहेरील कोनास दुभागणाऱ्या रेषेस पाया मिळे पर्यंत वाढविला. तर तो वाढविल्या सहित सर्व पाया व वाढविला खंड यांचा का० चौ० आणि कोन दुभागणाऱ्या रेषेचा वर्ग यांचा वजाबाकी वगवर दोन बाजूंचा का० चौ० होईल.

१७ एका बिंदू पासून वर्तुळास दोन स्पर्श रेषा एक छेदन रेषाकेली, तर स्पर्श बिंदु सांधणाऱ्या रेषेनें वर्तुळानें जे खंड झाले, ते गायन प्रमाणांत होतात.

१८ जर कोणत्या ही दोन त्रि० त प्रत्येकाचा एक एक कोन मिळून दोन स० असतील, व दुसरे दोन कोन वगवर असतील, म्हणजे एकाचा एक व



दुसऱ्याचा एक, तर राहिल्या कोनाचा बाजू प्रमाणांत होतील.

१९. सम द्वि बाजू त्रि० चा पायाचा कोण त्या ही बिंदूतून जाणारी रेषे केली अशी की, तीन दोन ही बाजूंस वाढविली असता त्रिकोणाचे एका बाजूचा पाया कडील कोना पासून जेवढा खंड होईल, तेवढा खंड दुसऱ्या बाजूंत मिळविला असता, जर ती त्या रेषेस मिळेल तर ती रेषा पाया नें दुभागिली जाईल.

२०. जर कोणत्या ही त्रि० तील एक बिंदूतून जाणाऱ्या कोना पासून रेषा समोरचे बाजूंस मिळत पर्यंत वाढविल्या, आणि त्यांतील शिरकोना पासून केलेली रेषा पायास जेथें छेदील, त्या बिंदू पासून दुसऱ्या दोन बाजूंचा छेदन बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा पायाशी शिरकोनांतून समानतर असणाऱ्या रेषेस मिळे पर्यंत केल्या, तर ती स० रेषा शिरकोन स्वकीं दुभागिली जाईल.

२१. त्रि० चे शिरकोना पासून पायावर लंब करून त्या मध्ये एक बिंदु घेऊन त्यांतून पायाचे दोन टोंका पासून समोरील बाजूंस मिळत अशा रेषा केल्या, तर पायांतील छेदन बिंदूशी दुसऱ्या दोन बाजूंतील छेदन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषांनी पायाशी जे कोन पडतात ते समान असतात.

२२. जारेघा गायन प्रमाणांत असतात त्यांस छेदणाऱ्या रेषांचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२३. त्रि० त एक बिंदू घेऊन त्यांतून त्रि० चा कोण बिंदू पासून समोरील बाजूंस मिळत पर्यंत रेषा केल्या आणि छेदन बिंदू सांधले, तर पूर्वी केलेल्या रेषांचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात, आणि छेदन बिंदू सांधणाऱ्या रेषा बाजू वाढवून त्यांस मिळविल्या, तर बाजूंचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२४ वि० ना आंतील किंवा बाहेरील बिंदूंतून वि० चे कोना पासून समो  
रचे बाजूस मिळत अशा रेषा केल्या आणि त्यांचे छेदन बिंदु सांघणाच्या  
रेषा वा नु बांदवून त्यांस मिळविल्या, तर त्या रेषांचे ते तीन छेदन बिंदु  
एका सरळ रेषेत येतील.

२५ अर्धवर्तुळ आणि वर्तुळपाद ही एका ज्येवर असली, तर त्यांचे को  
ना मध्ये जें क्षेत्र सांपडतें तें, जाची कर्ण रेषा ती ज्या आहे अशा समष्टि  
बाजु का० वि० बराबर होईल.

२६ उंची, शिरकोन, आणि दोन बाजुंची बेरीज अ० वजाबाकी दिली  
आहेत, या पासून वि० कर.

२७ पाया, उंची, आणि दोन बाजुंची बेरीज अ० वजाबाकी दिली आ  
हे, या पासून त्रिकोण कर.

२८ उंची, पाया कडील दोन कोनांची वजाबाकी, आणि दोन बाजुंची  
बेरीज अ० वजाबाकी दिली आहे, या पासून त्रिकोण कर.

२९ उंची, पायाचा दोन रेषांची वजाबाकी, आणि दोन बाजुंची बेरीज  
अ० वजाबाकी दिली आहे, या पासून वि० कर.

३० उंची, शिरकोन, आणि सर्व बाजुंची बेरीज दिली आहे, या पासून वि  
कोण कर.



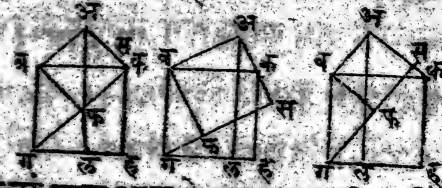
प्रथम बुकाचे ४० वे सिद्धांताचे

प्रकार.

प्रकार १

का० कित कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बेरावर आहे.

अवक का० त बक =  
अक + अव होईल.



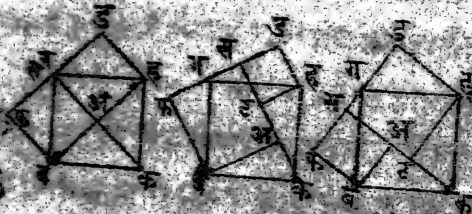
बक वर बह वर्ग कर जेव्हा अव, अकचे बेरावर, अधिक, किंवा उणी असेल, तेव्हा सविंदु कविंदूवर, किंवा अकरेचे बाहेर, किंवा आंत असेल.

ग, फ सांध. (१म प्र०) < अवक = < क ब ग आहे, यांतून साधारण < क ब फ वजा केला. < अवक = < फ व ग (१ बु० १५ सि० प्र०) अवक आणि फ ग व हे Δ समकोण. < व अ क = < व फ ग. < व फ ग का० आहे. आतां < व फ ग + < व फ स = २ का०. ग फ स सरकरेय आहे. व अ, ग स स० आहे. (१ बु० ३५ सि० प्र०) व स = अ ग तसेंच अ ग = व ल. (१म प्र०) व ल = व स अ अव याप्रमाणेच अ क = क ल. (१म प्र०) अव + अ क = व क हे सिद्ध.

प्रकार २

एथें कर्ण वर्ग Δ वर कर.

अव वर बक व बक वर  
गक लं व कर फ ग ग व वून  
वि अव वर ह डलं व कर अक



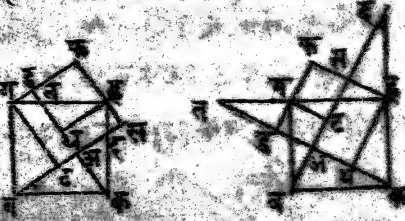


फट रेघेसस स्थळीसिळे पर्यंत वादीव. हट लंबकर.

अबक, फवग, दुहग, हटक हे  $\Delta$  एक रूप आहेत, असे १ बु. १ व १६ सि. चे आधारें सिद्ध होतें. अफ, हस हे अब, अक चे वर्ग आहेत. आतां फवग  $\Delta$  + दुहग  $\Delta$  = अबक  $\Delta$  + हटक  $\Delta$  यांत साधारण अबग हट ही व सिळविल्याने अफ + हस = बह. अब + अक = बक हे सि.

### प्रकार ३

एथें एक बाजूचा वर्ग दुसऱ्या बाजूचे वर्गावर करत कर्णाचा वर्ग  $\Delta$  कर. अब, क ह बाजूस्थळी सिळत पर्यंत वादीव. ग, ह विंदूपासून बह ग बह गट, हस लंबकर, हस वादवून निजवर गफ लंबकर, फह = फड कर आणि डथ, हथ क्रमें करून हफ, फड शी स. कर त्या थ विद्वर मिळतील. तसेंच डथ, गह रेखा वादीव अशा की, त स्थळी मिळतील.



अबक  $\Delta$  = गटब  $\Delta$  = गफह  $\Delta$  आहे.  $\therefore$  हथत  $\Delta$  + गडत  $\Delta$  = अकद  $\Delta$  + सहद  $\Delta$ . फगह  $\Delta$  + हथत  $\Delta$  = फथ + गतड  $\Delta$ . अबक  $\Delta$  + अकद  $\Delta$  = फथ + हसद  $\Delta$ ; परंतु गटब  $\Delta$  = गफह  $\Delta$  आहे. (२मक) बकद  $\Delta$  + बगट  $\Delta$  = फथ + हसद  $\Delta$  + फगह आहे.

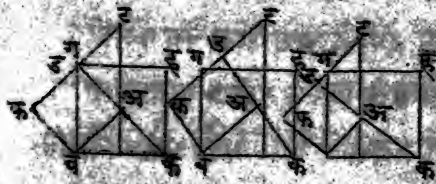
जेव्हां अब > अक तेव्हां गटदह क्षेत्र दोनही पक्षांत मिळविली, तर बह = फथ + गस. जेव्हां अब < अक तेव्हां गटदह क्षेत्र दोन भाग होतात. त्यातील दोनही पक्षांत पहिला मिळवून दुसरा कजाकेल, तर बह = फथ + गस आहे. बक = अक + अब हे सिद्ध.

या सिद्धांताचे आणखी प्रकार होतात, ते अभ्यासी जनाचा बुद्धि वादीवी, ह. गून सिद्ध करितां आकृतींनी मागल्याने दि. पुरा न केले आहे.



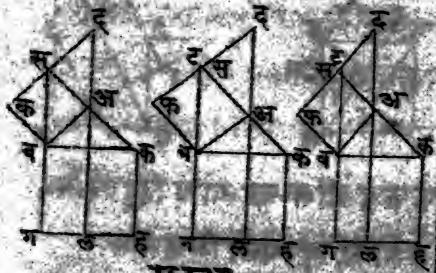
### प्रकार ४

एथें कर्णवर्ग  $\Delta$  वर करून, १ बु. चे ११, १२, २०, २५  
१५ सि. व ११ वे प्र. यांचे आधारे सिद्ध होई.



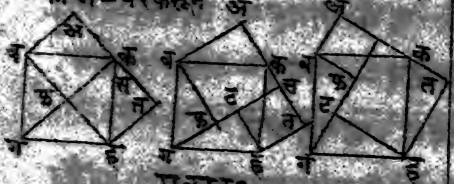
### प्रकार ६

एथें कर्णवर्ग एकेक बाजू याचे वर्ग  $\Delta$  वाहेर करून,  
१ बु. २५, २० सि. कप्प. यांचे आधारे सिद्ध होईल.



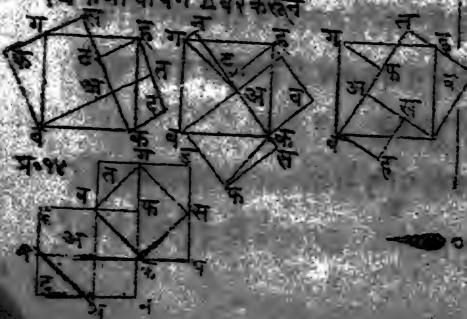
### प्रकार ८

एथें कर्णवर्ग  $\Delta$  वर न कविता दोन बाजूंलून ए  
का बा.  $\Delta$  वर करून अ.



### प्रकार ९

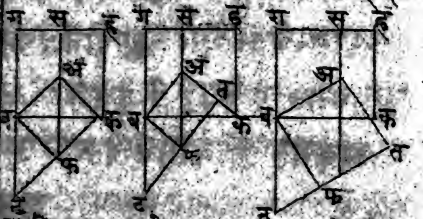
एथें कर्णवर्ग  $\Delta$  वर करून



### प्रकार ५

(१३६)

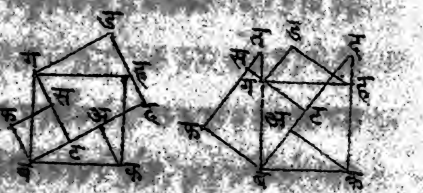
एथें कर्णवर्ग एकेक बाजू याचे वर्ग  $\Delta$  वर करून  
१ बु. २५, २०, २५ सि. चे आधारे सिद्ध होईल.



सुदील प्रकार ३ रे प्रकारा प्र. सम क्षेत्रे नि  
अवृत्त वयलांक. सिद्ध होतील.

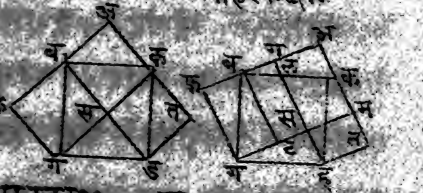
### प्रकार ७

एथें कर्णवर्ग  $\Delta$  वर करून.



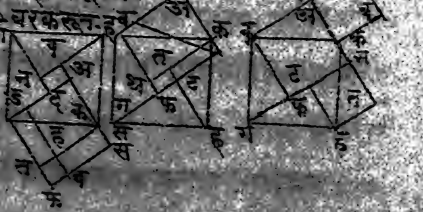
### प्रकार १०

एथें कर्णवर्ग  $\Delta$  चे वाहेर करून.



### प्रकार ११

तीनही बाजूचे वर्ग



## पहिल्या भागाची पुरवणी.

अंक संख्या लेखन वाचना विषयी विचार.

व्यापारांत जा ममाणें पायल्यांचा फरक आहे, ह्या गजे राजापुरी, संगमेश्वरी, फडची कोलापुरी, सातारी इ. वयांचे कमजाजती पणा सुळें एकच धान्य तशी राजापुरी पायलीनें सहामण, नोच संगमेश्वरी पायलीनें चारमण, फडचा पायलीनें तीन मण कांहीं पायली इ. मरतो. या ममाणें एकच अंक राशी २, २, ४, १०, १२ इ. अनेक मापांनीं मापिला जातो. या विषयी उपपत्ति.

व्याख्या.

१ दोहोंनीं मापिले अंक राशीस दिकम, तिहींनीं मापिले अंक राशीस त्रिकमरीति, इ. जा अंक मापानें राशी मापतात, तिनकें कमरीति असें झणतात; आणि हल्लीं चालू असे अंकांचें माप दादा आहे, त्यास दशक्रमरीति झणतात.

२ दशक्रमरीतींत दादांनीं अंक राशीचें एक माप होतें, झणून अंकन रूप येत आहेत, व दादांनीं हातचा एक होतो. या ममाणेंच एका दशक्रम, दशक्रम वत्रचो दशादिकक्रमरीतीचे संख्येंत अनुक्रमें १०, ११, १२ इ. पद्येंत अंक येऊन त्यांस स्वतंत्र अंक संज्ञानसल्या सुळें ते भ्रम उत्पन्न करणारे होतो, या अकरितां त्यांस अ, ब, क इ. अक्षर संज्ञा देऊन, पुढें लिहिल्या रीतीनें अंक राशीचें मापन करावें.

अंक राशी मापाचे कोठक.

दशक्रमरीतीचा	दिकनरीतीचा	इष्टक्रमरीतीचा.
१० एक ह्या गजे १६ हें	२ एक ह्या गजे १६ हें	३ एक ह्या गजे १६ हें

+ इष्ट ह्या गजे जाक्रमाची संख्या असेल ती अंक.

॥ सोळा पायल्यांचा एक मण धरल्या ह्या गजे.

१० दहं = १ शतं | २० दहं = १ शतं | ३० दहं = १ शतं  
 १० शतं = १ सहस्र | २० शतं = १ सहस्र | ३० शतं = १ सहस्र  
 इत्यादि ३० ३० ३० ३० ३० ३०

द्विक्रम, त्रिक्रम, इत्यादि रीतींची घडा मोड ह्या

जे एके क्रमांतील अंक राशीस दुसरे क्रमांत नेणे

रीति - पूर्णांकांतील उतरती भाजणीचे रीतीने जा क्रमाची संख्या असे  
 ल, त्या क्रमाचे कोष्टकाप्रमाणे त्या संख्येचे एक करून, जा क्रमांत नेणे अ  
 सेल, त्या क्रमाचे कोष्टकाप्रमाणे उतरती भाजणीचे रीतीने त्या एकमास  
 भारी नावाचे अंकांचे रूप घावे.

उदाहरणे.

(१) अष्टकमरीतीचे ३६५ चा संपंचक्रम, सप्तक्रम आणि द्वादशक्रम रीतीत मांड.

शतं. दहं. एक.	एक.	एक.	एक.
३ ६ ५	५ ३ ६ ५	५ ३ ६ ५	५ ३ ६ ५
३६५	५३६	५३६	५३६
३६५	५३६	५३६	५३६
३६५	५३६	५३६	५३६
३६५	५३६	५३६	५३६

उत्तरे १२४०, ५००, १०५

(२) ३६५, ६३५, २६५ या अष्टक संख्येची बेरीज कर आणि तीस द्वादश  
 क्र. रीतीचें रूप दे.

$३६५ + ६३५ + २६५ = १२६५$  याची द्वादशक्रम रीतीने बेरीज.  $= ०५५१$  हे उ०

द्वादशक्रम रीतीचा संख्यांचा भागाकारा विषयी विचार

१ कोणत्याही संख्येवर ५ किंवा ५ आदे, सरती संख्या ५ नी निःशेष भागिली जाईल.

२ कोणत्याही संख्येवर जितकी शून्ये असतील, तितकी १ या अंकावर घेऊन जी संख्या होईल, तिने ती पूर्व संख्या निःशेष भागिली जाईल.

३ कोणत्याही संख्येवर १, २, ३, ४ इ. शून्ये आहेत, अथवा वरचे १, २, ३, ४ इ. अंक अनुक्रमे २, ४, ८, १६ इ. यांनी निःशेष भागिले जातील, तर ती सर्व संख्या अनुक्रमे २, ४, ८, १६ इ. यांनी निःशेष भागिली जाईल.

४ कोणत्याही संख्येतील सर्व अंकांची बेरीज ३ किंवा ९ यांनी निःशेष भागिली जाईल, तर ती संख्या अनुक्रमे ३ किंवा ९ यांनी निःशेष भागिली जाईल.

५ कोणत्याही संख्येतील विषम स्थळीचे अंकांची बेरीज सम स्थळीचे अंकांचे बेरीजे बराबर आहे, तर ती संख्या ११ नीं व त्या संख्येवर शून्य असेल तर २२ नीं निःशेष भागिली जाईल.

६ कोणत्याही संख्येवर शून्य किंवा सम अंक असेल, तर व बरील दोन शून्ये किंवा वरचे दोन अंक ४ नीं निःशेष भागिले जातील, तर आणि वरील तीन शून्ये किंवा ३ अंक ८ नीं निःशेष भागिले जातील अशा संख्या असून जर त्या प्रत्येक संख्येतील सर्व अंकांची बेरीज ३ नीं निःशेष भागिली जाईल, तर ती संख्या अनुक्रमे ६, १२, २४ यांनी निःशेष भागिली जाईल, आणि जर सर्व अंकांची बेरीज ९ नीं भागिली जाईल, तर ती संख्या १८, ३६, ७२ यांनी निःशेष भागिली जाईल. आतां जर सम आणि विषम स्थळीचे अंकांची बेरीज बराबर असेल, तर ती संख्या २२, ४४, ८८ यांनी निःशेष भागिली जाईल.



या सारणीत कोष्ठ को पावन सो को सो जा रकमा या ३०  
परजा असम होतात त्या को उतर २०२ को आदेत.

२४८	२४९	१३५	१३६	२५५	२५६	१३८	२२३	२४१	३६६	१४२	२०९	२४६	१६१	१३७	२१४
२४९	१५२	१३६	१३७	१५२	१५३	२२४	२८०	२४२	१४५	२५५	३०३	२४१	१६०	३१०	२९७
२५०	२६३	२३१	१२०	३५१	२५६	२२४	२३७	३३७	२७०	२३८	१९३	३४३	२६५	२३३	१९८
२६३	१८४	२८०	३२०	३६०	१६१	२८७	३२०	१७४	१७७	२७३	३३४	१६२	१८२	२७०	३२२
२६४	३६३	३३८	२४३	२६३	३६४	३३१	२७०	२४३	३५५	१३१	२३३	२४३	३५६	१३२	२३९
२७२	१६२	३०९	२९८	२०५	१६६	३०६	३०१	१२५	१५६	३४६	२९१	१९६	१५५	३१५	२९२
२८१	२६६	२९४	११७	३३८	२३९	२३५	११६	३४८	२५२	२३७	३२३	३४७	२६०	२८८	३२३
२८२	१८१	२७७	३३०	१७३	१७८	२७४	३३३	१६३	१८८	२८६	३२३	१६४	१८७	२८३	३२४
२८३	३५३	१२२	२२२	२६२	३५८	१७६	२७७	२४७	३६०	१३६	२७५	२४०	३६६	१४३	२०८
२८४	१५८	३३८	२८२	१९८	१५३	३३३	२९४	२००	१५१	३११	२९६	२७७	३४६	३०४	३०३
२८५	२५७	२९५	१८६	३६५	२६२	२३७	१२१	३४३	२६६	२३२	१९९	३४६	२७९	२३२	११२
२८६	१९०	२८६	३३१	१६६	१८५	१८१	३२६	१६८	१८९	३७२	३२८	१७५	१७६	२७२	३३५
२८७	३६३	१४०	२९१	२४६	३६३	१३९	२५०	२५७	१३३	२९८	२५३	३५४	१३०	२३१	
२८८	१४७	३०७	३००	२०३	१४८	३०८	३०९	१२७	१२४	३१४	२९३	१९४	१५७	३१७	२२०
२८९	२६८	२३६	११५	३४०	२६७	२३५	११६	३६६	२६१	२३६	३२२	३४९	२५८	२६६	१२५
२९०	१७९	२७५	३२१	१७१	१८०	२७६	३३१	१६५	१८६	२८२	३२५	१६२	१८९	२८५	३२२

### तिसयाभागाची पुरवणी

#### असमपदे

असमपद > याहून जास्ती, किंवा < याहून कमी या निन्दानें दाखवितात.  
जसे,  $५ > ३$ ,  $(५ - ३) > ०$ ,  $३ < ५$ ,  $(५ - ३) < ०$  अर्थात् असमपदे आहेत.

#### उदाहरणे

(१) कोणताही सम अपूर्णाक आणि त्याचा व्युत्क्रम यांची बेरीज २ हून अधिक आहे.

अ आणि व ही असमपदे आहेत, तर  $\frac{अ}{व} + \frac{व}{अ} > २$  होईल.

आतां अ आणि व यांचे अंतर दाखवायास कपे, तेव्हां  $व = अ + क$  यांस व  
ने आणि अने मायून,  $१ = \frac{अ}{व} + \frac{क}{व} \dots (१)$ ,  $\frac{व}{अ} = १ + \frac{क}{अ} \dots (२)$   
ज. समी. सत्य. क.  $\frac{अ}{व} = १ - \frac{क}{व} \dots (३)$  हु. आणि ति. स. यांची मि.

क०  $\frac{अ}{ब} + \frac{ब}{अ} = २ + \frac{क}{अ} - \frac{क}{ब}$  परंतु  $\frac{क}{अ} > \frac{क}{ब}$  आहे, कारण दोहोंचे अंश सार  
 खे असून दुसऱ्याचा छेद पहिल्याचे छेदाहून मोठा आहे, याजकरिता  
 दुसरे पदाची किंमत सहजच मध्यम पदाने किमतीपेक्षा लहान आहे;  
 हाणून  $\frac{क}{अ} - \frac{क}{ब}$  ही बाकी धन आहे, याजकरिता  $\frac{अ}{ब} + \frac{ब}{अ} = २ +$  कांहीं तरी  
 धन आहे, हाणून  $\frac{अ}{ब} + \frac{ब}{अ} > २$  आहे हे सिद्ध आहे. (२) २२-१० < २२+१, आणि २२+२ > २२-१२ आहे, तर क्षाची पूर्ण किंमत  
 उत्तर २२-५

### अनियतसमीकरणे

समीकरणांत जितकी अव्यक्तपदे असतील तितकी समीकरणे अस  
 त्यास प्रत्येक पदाची एक एक किंमत निघती, परंतु समीकरणे अव्यक्त  
 पदांचा संख्येपेक्षा थोडी असल्यास किमती अनंत निघतात त्यांत पु  
 णोंक किंवा धनउत्तरे असावी किंवा वर्गधन असावे, इत्यादि नियम  
 केल्यास त्या उत्तरांचे संख्येस कांही नियम होतो.

रीति. अशा समीकरणांत लहान वेळा मकाशकानें मोठा वेळा मकाश  
 क भागून पूर्ण पदे व अपूर्ण पदे वेगळीं लिहवीं; यांत अपूर्ण पदाबरोबर  
 दुसरे एक अव्यक्त धरून छेद सोडवून पूर्वमार्थें छेदित्वा लवावी. सारी  
 तीनें एका अव्यक्त पदाचा वेळा मकाशक एक, व दुसऱ्याचा पूर्णोक्त दोई  
 पर्यंत वारंवार करून, शेवटील पदाबरोबर, इत्यादि दृष्टीपारें, आ  
 णि त्या पासून अनुक्रमें किमती काढिल जाव्हीं, हाणजे सांगितल्या अ  
 व्यक्त पदाचा किमती निघतील.

+ छेदाहरणांत तपशील केल्या ममार्थें

उदाहरणः

(१) ५क्ष+७य=२९ एवम् क्ष, य अव्यक्त पदों का किमतीकाटः

$$\text{आतां क्ष+य+}\frac{३५}{५}=५+\frac{३५}{५} \therefore \text{क्ष}=५-\text{य}+\frac{४-२५}{५}, \frac{४-२५}{५}=५ \therefore ४-२५$$

$$=२५, २-य=\frac{३५}{५}=२५+\frac{५}{५}, \frac{५}{५}=\text{स} \therefore \text{य}=२५.$$

$$\text{आतां य}=२-५\text{स आनि क्ष}=५-\text{य}+५=३+५\text{स}+२\text{स}=३+७\text{स}$$

$$\text{एवम् जरस}=० \text{ तरक्ष}=३ \text{ आनि य}=०, \text{जरस}=१ \text{ तरक्ष}=० \text{ आनि य}=३,$$

$$\text{जरस}=१ \text{ तरक्ष}=० \text{ आनि य}=७ \text{ इत्यादि.}$$

(२) जा संख्यासे १, ४, ५ यांनी भागिलें असतां अनुक्रमें २, ३, ४ बाकी  
रहाताव ती संख्या कोणती?

$$\text{क्ष} = \text{संख्याचे. } \frac{१२-३}{३} = ५ = \text{पूर्णांक} \therefore \text{क्ष}=३५+२, \text{दुसरे संकेता पासु}$$

$$\text{न } \frac{१२-३}{३} \text{ अथवा } \frac{३५-१}{३} = १२ = \text{क} = \text{पूर्णांक म्हणजे } ३५-१=४६ \text{ अथवा } ५=$$

$$\text{क}+\frac{१२-१}{३}, \frac{१२-१}{३} = \text{रघे, तर क}=३२-१ \text{ तेव्हा } ५=४२-१ \text{ आनि क्ष}=३५+२$$

$$=१२२-१; \text{तिसऱ्या संकेता ममाणें } \frac{१२-४}{४} \text{ अथवा } \frac{१२२-५}{४} = \text{पूर्णांक म्हणजे}$$

$$२२+\frac{३५}{४}=१ \text{ पूर्णांक} \therefore \frac{३५}{४} = \text{पूर्णांक}$$

$$\frac{३५}{४} = ८ \text{ म, ये, तेव्हा र}=५८, \text{आनि क्ष}=१२२-१=४० \text{ म}-१ \text{ जर म}=१, \text{क्ष}=५९,$$

$$\text{जर म}=२, \text{क्ष}=११९ \text{ इत्यादि.}$$

(३) ४क्ष+३य+१०=५३ या समीकरणांत क्ष, य आनि ज्ञ यांचा किमती

काटः

$$\text{बरील समीकरण ३नी भागून, क्ष+य+२+}\frac{३५}{३}=\text{क्ष}+\frac{३५}{३}, \text{य}=\text{क्ष}$$

$$+२+\frac{३५}{३}, \frac{३५}{३}=\text{य घे, तर क्ष+क्ष-१}=२५ \text{ तेव्हा क्ष}=२३-२५-१$$

$$\text{आनि य}=\text{क्ष}-२ \text{ क्ष}+३५+१-२+५=४५-\text{क्ष}-२ \text{ यांत क्ष आनि य यांचा}$$

विकाशी कोणत्याही पूर्णांक किमती लिहिल्या असतां क्ष, य यांचा किम



ती निघतील. जर प=० आणि ज्ञ=१ केला तर क्ष=१ आणि च=२

(५) दोघां सुलाचे जवळ एकंदर १०० पैसे होते. त्यांत पहिल्यानें आपले आठ आठ मोजिले तेव्हां ७ बाकी राहिले, आणि दुसऱ्यानें आपले दहा दहा मोजिले तेव्हां ७ बाकी राहिले. या जवळ मलेका जवळ किती किती पैसे होते.

क्ष = पहिल्या जवळचे पैसे, तर १०० - क्ष = दुसऱ्या जवळचे पैसे.

$\frac{क्ष-७}{८} = \text{पूर्ण संख्या, } = \text{मघे.}$   $\frac{क्ष-७}{८} = \text{म१७, } \frac{१३-७}{८} = \frac{६-७}{८} = \frac{१०-७}{८}$   
 $= -\text{म१} + \frac{\text{म१३}}{८}, \frac{\text{म१३}}{८} = \text{नघे.}$   $\text{म} = ५ \text{ न} = ३$  आणि  $क्ष = ५० \text{ न} = १७, \text{न} = ३$  चे तर क्ष = २३

तेव्हां पहिल्या जवळ २३ पैसे व दुसऱ्या जवळ ७७ पैसे होते.

(५) तीन रुपयांस ५ पारवे, ५ रुपयांस ७ सारवे, ७ रुपयांस ९ हंस आणि ९ रुपयांस तीन मोर असे घेत असतां, एका गृहस्थांत १०० रुपयांस १०० पक्षी आणिले, त्यास प्रत्येक जातीचे किती किती आणिले.

पारवे ५, सारवे ५, हंस ७, मोर ९

(६) तीन किले होते. त्यांत जा किल्यांत थोडी फौज होती त्यावर शत्रूनें हल्ला केला, तेव्हां त्या किलेदारानें दुसऱ्या दोघांस असें सांगितलें कीं, मज जवळचा फौजे इतकी आपल्यांतून मला कुमक घावी, त्या मला गें त्या गें कुमक घेऊन शत्रू हटविला, पुढें शत्रू दुसरे किल्यावर मेला तेथील किलेदारानें आपले इतकाही फौज दुसऱ्या दोघांकडून कुमक घेऊन शत्रूला सारें हटविलें. पुढें शत्रू तिसरे किल्यावर गेला तेथील किलेदारानें ही असेंच केल्यामुळे तीनही किल्यांत सारसी फौज आली तर मलेकांनीं



ती किती फौज होती.

उत्तर, म० कि० १६ ११ ४८ दु० कि० २८ ५६ ८४ ति० कि० ३७ ७४ १११

## प्रश्नसमुदाय.

### पूर्णीक.

(१) एका पलटणींत ५७४ सिपाई, १७ हवालदार, ५५ नाईक, १७ जमादार, ६ कप्तान, १५ रुमैदार, २०० भिस्ती, ८० न्हावी आणि ११० मोची इतकी मनुष्ये आहेत, तर त्या पलटणींत एकंदर मनुष्ये किती?

उत्तर, १०८९ मनुष्ये.

(२) एका संख्येतून ५३७ बजा केले असता ३९१ बाकी राहिले. ती संख्या कोणती?

उत्तर, ९२८

(३) दोन संख्यांचे अंतर ५१२ आणि त्यांतील लहान संख्या १३२ तर मोठी संख्या कोणती?

उत्तर, ६४४

(४) एका रकमेस १३२ मिळविले आणि त्या मिळवणींत ७५१ बजा केले तर ४०० बाकी रहातात. तेव्हां ती रकम कोणती?

उत्तर ७३०५

(५) एका राजास पांच पुत्र व एक कन्या होती. जावेळी ती आपले नव्याचे घरी जावयास निघाली, त्यावेळी राजाने तिला ५५५५५ रुपयांचा ओकडा घालून दिला. नंतर ती वडील भावास भेटावयास गेली. तेव्हां त्याने डावेकडील प्रथम अंकावर एक शून्य देऊन ती रकम वाढविली, दुसऱ्या भावाने दुसऱ्या अंकावर शून्य देऊन रकम वाढविली, तिसऱ्या भावाने तिसऱ्या अंकावर शून्य देऊन रकम वाढविली, चौथ्या भावाने चौथ्या अंकावर शून्य देऊन रकम वाढविली, पाचव्या भावाने पाचव्या अंकावर शून्य देऊन रकम वाढविली. शेवटी कन्येने

तीर कम स्वज्ञान विसास दास पुन पुर्व वृत्तान्त सांगितला, तेव्हां त्यानें मले काचे नावें किती किती रुपये लिहावे.

(राजाचें नावें. व० पु० दु० पु० ति० पु० न० पु० पा० पु०  
उत्तर ५५५५५, ४५०००, ४५४५०००, ४५४५४५००, ४५४५४५४५०, ४५४५४५४५४५०.

(६) एक गृहस्थ कमळें घेऊन देवांस गेला. त्यांतील कमळें देवांस घालून शिल्लक रद्दान, वितकीं ती उसनीं घेत असे. त्यानें ४ देवांस मले कीं १५ कमळें घातलीं आणि दोघदीं घरीं रिकामा गेला तेव्हां प्रथम त्यानें किती कमळें नेलीं होतीर.

उत्तर ३० क०

(७) तीन संख्या शोधून काढ, जांस अनुक्रमें ७३५, ३२१ आणि ६४९ यांनीं भागिलें असतां भागाकार ६=७४, २३२१ आणि ७५२२ येतात.

(८) ९४३२ गुण्य, ३९०२ गुणक यांचा बेग, कोष्ठ की, धांवरा आणि ज्योतिषी अशा बेगाच्या रीतींनीं गुणाकार कर. उत्तर ३६००३६६४

(९) दोन शहरांत अंतर १४० मैल आहे, आतां त्या दोन शहरां हून अ आणि ब परस्पर भेदाक्यास निघाले. अ, ब पेक्षां ४ मैल दररोज जास्त चालतो. पुढें त्यांचीं १४ दिवसांनीं मार्गांत गांठ पडली, तेव्हां ते दररोज किती मैल चालले?

उत्तर, अ ७ मैल, ब ३ मैल.

(१०) २९ वंडी ३ मण ५ शेर तेल आहे, यांतून ६, ५, ४ दोघांचीं तीन भांडीं समनेनें किती वेळां भरून निघतील?

उत्तर, ११५ वेळां

(११) दोन शहरां मध्ये अंतर ४=१ मैल आहे, आतां एका शहरा कडून अ आणि दुसरी कडून ब हे दोन मनुष्य निघाले ते अनुक्रमें ६, ७ मैल चालतात, तर त्यांस भेट होण्यास व स्थळांचा व्यक्तम होण्यास किती दिवस पाहिजेत?

उत्तर, भेट ३७, अचाळु ००, बचाळु ६६

१२ एक मनुष्य ३६० मैल गेला, तो असा की, ५ मैल गाडीं तून तर ४ मैल पायांनीं व ११ मैल घोड्या वरून तेव्हां मत्येक जातीची त्याची चाल किती झाली?

गा. पा. घो.  
उत्तर १०, ७२-११८ मैल.

(१३) त्या तीन संख्या कोणत्या आहेत. जात मथम तिसरीचे तिप्पट आहे, आणि जवळजवळचे दोन संख्यांचे अंतरांचे अंतर दोन आहे.

उत्तर (००)

(१४) त्या तीन संख्या कोणत्या आहेत. जात मथम दुसरीचे विसपट आहे, आणि जवळजवळचे दोन संख्यांचे भागाकारांचा भागाकार ३६५ आहे.

उत्तर (००)

(१५) २११ भागाकार येण्यास ५८३२ यांस किती पैनी भागावें.

उत्तर ४६ पै.

(१६) ११ हात लांब ३ हात रुंद ५ हात उंच अशा २० स पेट्यांस कापड लावणें आहे, त्यास ४ हात रुंदीचें कापड किती हात लांब लागेल?

उत्तर १४४२ हात.

(१७) एका जासुदानें दर रोज ३ मैल प्रमाणें २५५ मैल लांबीचे वाण्या स जाऊन भोजन स्वर्च बद्दल पांच रुपये घेतले व दुसरे वेळेस जल दी करितां दर रोज ५ मैल प्रमाणें जाऊन पूर्वी इतका भोजन स्वर्च व दर रोज २ आणे प्रमाणें भत्ता घेतला; तेव्हां त्याजवळ जल दी चालत्या मुळें शिल्लक किती राहिली?

उत्तर - रु. ६ आणे.

(१८) एका गृहस्थाचा घरीं अ, ब, क या तिघांस २, ३, ४ या प्रमाणानेंद्रव्य मिळालें, त्यात कला ६०० रुपये मिळाले, यावरून अ आणि ब यांस किती किती रु. मिळाले व सर्व द्रव्य किती होते?

सर्व अ ब  
उत्तर १२५ ३००, ४५० रुपये.

(१९) एक मनुष्य ३० रुपये दर महा पगार असतां १५ रुपये स्वर्च करी आणि, २० रुपये पगार झाला तेव्हां २५ रुपये स्वर्च करी, पुढे एक वर्षे झाल्यावर त्याजवळ १०० रुपये शिल्लक राहिले, तेव्हां निरनिराळे पगाराची किती किती महिने चा करी झाली?

उत्तर २० रु. ४ म. ३० रु. ८ महिने.

(२०) अबक या तिघांनीं एका सावकारा कडून कांहीं रुपये दर महा दरवोंकडा २, ४, ६ रुपये व्याजाचे दरानें नेऊन एक वर्षांत सर्वांनीं १५० रुपये रास आणून दिली. त्यांत त्यांचा व्याजाचा आकार सारखा होवा, तेव्हां प्रत्येकाचें सुद्धल किती किती होते?

उत्तर २० रु. ४ म. ३० रु. ८ म. ३० रु. ८ म.

(२१) एका मनुष्यानें ४, ८, १२ रु. महिना अशा करारानें चाकर ठेविले, त्या तिघांनीं मिळून ४ म. १ दिवस चाकरी केली, व त्यांस सारखा रोजसुरा मिळाला, तेव्हां प्रत्येकाची चाकरी किती किती दिवस झाली.

म. दि. दु. दि. ति. दि.

उत्तर

(२२) कांहीं शिपाई एका किल्यावर पहाऱ्यास ठेवावयाचे आहेत, ते ५० हात अंतरानें ठेविले असतां २०० हात किल्ला रिकाना राहता, आणि ६० हातांवर ठेविले असतां १०० शिपाई शिल्लक राहतात, यावरून शिपाई किती व किल्याची लांबी किती असावी?

हात.

उत्तर, शि. ६२०० कि. म. १००००

(२३) कुवा आणि ससा हे एक सरळ रेषेंत १० चाई अंतरानें उभे होते, ते दोघे ही दरसेकंदास ५ पावले पळू लागले, तेव्हां २० मिनिटांनीं कुवानें ससास धरिलें. यावरून त्या दोघांचे गतीचा अंतर किती होई?



तें?

उत्तर ३ इंच

(२४) ५ अवर ४ मिन्युटांनी सूर्योदय होत असता, एक मनुष्य २० दिव  
सांनी एके सुकामास पांचवी, तोच मनुष्य ६ अवरांनी सूर्योदय होत अ  
सल्यास किती दिवशी पांचवेर?

उत्तर २३ १/२ दि०

(२५) एक काम १६ मनुष्यां कडून कांहीं सुदतीत पुरे करविणें होतें; परं  
तु २ दिवसांनंतर ३ मनुष्ये मदतीस दिल्यामुळे ३४ दिवसांत पुरें झालें;  
तर पूर्वसंकेत किती दिवसांचा होता?

उत्तर ४० दिवस.

(२६) २ फूट लांब १ फूट रुंद व १ फूट उंच अशा फयांत दीड मण भात  
होतें; तर त्याच फयांची १ मण भात रहाविण्यासाठी उंची किती असावी?  
व एकेक मापांत फारफेर करून, त्याचा किती तहनें पालट करिता येईल.

उत्तर तीन तहानी,

उंची = इंच.

(२७) एका मनुष्याने ४०० हात लांब २ हात रुंद आणि ४ हात उंच अशी  
भित घालून ३२ रु० घेतले; दुसरे वेळेस त्याने ८०० हा. ला. ४ हा. रु. आ  
णि ८ हात उंच अशी भित घालून, ७० रु० घेतले, तेव्हां त्याचा पूर्वीचे  
करास प्रमाणे किती रु० नफा किंवा तोटा झाला?

उत्तर १०६ रु० तोटा.

(२८) एक कुरण = गाई ७२ दिवसांत खातात आणि ५ गाई व २ घोडे  
६४ दिवसांत खातात; तर तेंच कुरण ३६ दिवसांत खाण्यास ३ घोड्या  
स किती गाई व चार गाईस किती घोडे मदत असावे?

उत्तर १० गाई, ६ घोडे.

(२९) एक सरदार २ दिवसांत लढाईवर गेला, त्यास वाटेव घोड्यांचा  
वैरणीचा सर्व असा पडला की, पहिले दिवशी ३ घोड्यांस २ रुपये; दु

(१३)

दिवशीं ४ घोड्यांस ३० आणि निसरे दिवशीं ५ घोड्यांस ४ रुपये,  
व एकंदर सर्वांचा आकार १३२ रु० झाला, तर त्याजवळ घोडे किती  
होते? उत्तर ६० घोडे.

(१०) एका सुद्धाची ४ महिन्यांनी १३५ रु०, व १० महिन्यांनी १५० रु०  
रास होते तर सुद्धा व व्याजाचा दर काय होता?

उत्तर रु० १२५, दर महादर ३०.

(११) आठ महिन्यांनी ५४० रु० घावयाचे आहेत, ते एकोन महिन्यांना  
दोन आज देणें तर किती द्यावे. उत्तर ५००

(१२) भाज्यनवांचे स्केलात आहेत, यांचा भागाकार १० चे स्के  
लांत कर. उत्तर १९६  $\frac{१५}{२}$

## अपूर्णांक.

(१३) रुपये ३५५॥५॥ व विषे २५॥१॥ यांचे १॥२॥ आणि  
६॥३॥ (६॥३॥) यांस बराबर भावाचें व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप दे.

उत्तर १५०  $\frac{५९७}{६१४४}$ , ११  $\frac{२१८९}{१५३६०}$  ५६

(१४)  $\frac{१६}{३}$ ,  $\frac{३}{२}$ ,  $\frac{१३}{७}$  चे  $\frac{१३}{२}$  आणि  $\frac{१३}{२}$  यांची मिळवणी कर.  
उत्तर ३  $\frac{१३४३}{५४००}$

(१५) एका गांवांत ४ कांहीरदात होते, त्यांस एकेक वस्त्र तयार कर-  
ण्यास अनुक्रमे ४, ५, ६ दिवस लागत. त्याचार असा मीनी एकाच दि-  
वशीं मागावर वस्त्रे ला मिळी, तर त्या दिवसा पासून ते आप आपलीं  
वस्त्रे एकरमपुरीं करून कितवे दिवशीं भेटतील? व मलेकाची कि-  
ती किती वस्त्रे होतील? उत्तर ४२० वे दि. म. व. दु. व. ति. व. व. व.

(१४)

(३६) ६० घोडे ३० दिवसांत जें कुरण खातात, तेंच ९० गाई ६० दिवसांत खातात, तर तेंच कुरण घोडा व १ गाय किती दिवसांत खातील?

उत्तर, १४०० ३६ दि०

(३७) विद्याभ्यास करणारे एका सुलास ६ फुटी चौरस जमीन लागते तर ९६ सुलांचे अभ्यासास किती लांबी रुंदीची शाळा असावी? जीत पुस्तकें ठेवण्या करितां ११० फु० सामान ठेवण्या करितां १७२ फु०, आणि अभ्यास घेण्या करितां मोकळी जागा ११० फु० असली पाहिजे. व शाळेची रुंदी, लांबीचे निम्मे असली पाहिजे.

उत्तर ला० फु० ४४ रु० फु० २२

(३८) एक मनुष्य २ घटिकेंत २ कोस ओझें नेऊन आणें घेतो, तर तेंच ओझें ३ घटिकेंत २ कोस व ३०० घटिकेंत २०० कोस नेऊन किती आणें घेईल?

उत्तर १ १/३ आणें, १ रु० ४ २/३ आ.

(३९) एका उदम्यानें ३०० पोंडांस ९ घोडे व ७ गाई विकल्या, दुसरे वेळेस त्याच किमतीस ६ घोडे व १३ गाई विकल्या, तर प्रत्येक घोडाची व गाईची किंमत काय?

उत्तर, घो० २४ गा० १२ पोंड.

(४०) अ आणि ब मिळून एक काम दररोज ६ अवर प्रमाणें ५ दिवसांत करितात व ब एकटा ९ अवर प्रमाणें ७ १/३ दिवसांत करितो, तर १२ अ वर प्रमाणें अ किती दिवसांत करील?

उत्तर, ४ २/३ दि०

(४१) एका गृहस्थानें एका दिवशीं ६, ९ रु० व्याजाचे दरानें निरनिराळे रु० घेऊन २३ वर्षांनीं ८३५ रु० रास आणून दिली, त्यांत पहिल्या रकमेचा दुप्पट दुसऱ्या रकमेचें व्याज होतें; तेव्हां त्यांचे सुदृढ किती किती रु० होते?

उत्तर ३००, ४०० रु०

(४२) एक काम कांहीं घटिका अ ब त्या पेक्षा ४ घटिका अधिक व मिळू न १६ घटिकेंत करितात, व अन्ना वेळा इतकें व आणि वन्ना वेळा इतकें अ मिळून हे काम करितात. जर त्यांचे काळांत २ घटिकेचें अंतर ठेवून तें काम पुरें करणें आहे, तर किती किती घटिका करावें?

उत्तर, अ ६ $\frac{१}{२}$ , व ९ $\frac{१}{२}$  अ १२ $\frac{३}{४}$ , व ९ $\frac{३}{४}$ .

(४३) ससा, कुतरा आणि वाघ हे सोळा सोळा होताचें अंतरावर उभे होते. पुढें ससा मागें कुतरा लागल्यावर २४ मिन्युटांनी वाघ उभयतां मागें लागला, तो दर मिन्युटांत २ हात चालतो व कुतरा १६ हात चालतो. शेवटीं ससा, कुतरा आणि वाघ हे एके ठिकाणीं जमले; चाज वरून ससा दर मिन्युटांत किती चालला? उत्तर, १५ $\frac{२०}{३}$  हात.

(४४) ४४२ शोरांचा हांडा प्राण्यानें भरलेला होता, त्यांतून अ आणि ब हे दोन भाडीं घेऊन पाणी काढावयास लागले; अ ३ मिन्युटांत २ भाडीं काढी आणि ब २ मिन्युटांत २ भाडीं काढी, अर्चे भांडें बनें भांड्याचे दुप्पट होतें. तेव्हां तो हांडा १२ मिन्युटांत रिकामा झाला, तर मत्सेक भांडें किती शोरांचें होतें? उत्तर २६, १३ शोर.

(४५) खाली लिहिलेल्या रकमांचा रेघांचा रीतीनें, व्यवहारी अपूर्णाकाचे रीतीनें बदशांश रीतीनें बेरजा कर.

रुपये	केली बारुडे.	वजन	तोळेवार
६४५११२	३१॥२॥=	५११॥१॥२	१११॥१११
४३॥१॥	॥॥॥॥५॥=	३०॥॥॥१॥४	५॥॥॥१११
६३॥१॥	५॥॥॥॥॥॥=	॥॥॥॥॥॥॥॥	॥॥॥॥॥॥॥
५॥॥	६५१॥=	५११॥॥॥=	१॥११॥॥॥



(१६)

(४६) २३६ ना १२ चांस ॥ ३॥ चांनीं दशांशरीतीने भाग असें कीं, भाग  
कारांत दशांश स्थळें चार येतील. उत्तर, ४६७.५९७४

(४७) ११ चांस ००००१ चांनीं भाग उत्तर १०००

(४८) ५२८ चांस ३७१ ० चांनीं भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश  
स्थळें ९ होतील. उत्तर ००१४२

(४९) एक कुकान दार १३ रुपयांस ६ मण, ५ रु० २ मण, ७ ३/४ रु० २ ३/४ मण  
आणि ११ ३/४ रु० ३ मण अशा भावांचे साखरेंत १००० ची ७ मण, ३४ रु० ची  
११ मण आणि २००० ची १२ मण साखर घालून, तें मिश्र दार मणी ३ रु० म  
माणें विक्री वयास इच्छितो, तर मत्येक जातीची साखर किती किती घा  
व्यावी?

म० दु० ति० च० भावाची

उत्तर ७५० २० ७५० ७५ मण

(५०) दोन बाहरां मध्ये अंतर ३९६ मैल आहे, त्या दोन बाहरांतून अ  
आणि ब हे दोन जासूद एकदम निघाले, ते त्यांचे चालींचे बजाबाकी  
इतके दिवसांनी परस्परांस भेटले, त्यावेळीं अ २०० मैल चालला हो  
ता; तेव्हां प्रत्येकाची चाल किती? उत्तर १००, ९८ मैल.

(५१) अ आणि ब या दोघांनीं मार्गांत जेवण केले. त्यांत अचे दीड गोर  
ब वचे दोन गोर तांदुळ होते इतक्यांत त्यांचा मित्र क मनुष्य तेथे आ  
ला तेव्हां त्या तिघांनीं अन्न वांटून घेतलें तें असें, ४ : ३ :: अ : ब आ  
णि २ : ३ :: अ + ब : क, जातेवेळीं कने दोन रुपये दिले ते दोघांनीं कस  
कसे वांटून घावे? उत्तर अ १० आ ८० पे १ रु० ५ आ ४ पे.

(५२) अ, ब आणि क या तिघांनीं एका व्यापारांत पुढें सांगतो याप्र  
माणें भांडवल घालून २००० रु० जमविले. त्यांस व्यापारा अंती ६० ३/४ रु०

(१७)

नका मिळाला तर प्रत्येकाने कसा वाटून द्यावा. जर  $२अ + २ब = ७ब + ७क$   
आणि  $८ब - ८अ = अ + क$  या प्रमाणे सुद्धल असेल.

अ व क.

उत्तर १५३०, २०३५, २५३०

(५३) ५० हात लांब ५० हात रुंद अशा जाग्यांत १००० हांडया ठेविता येतात  
तर १००० हांडया ठेवायास किती लांबीची चौरसाकृति असावी?

उत्तर, ७००. ७१०६ लांबी, ७००. ७१०६ रुंदी.

(५४) ते अपूर्णाक काय आहेत की, जांचे अंशांत ७ वजा केले, तर ३ वा  
की राहातात आणि छेदांस ११ नीं भागिले तर त्याची किंमत ६ होते. उ० ३३

(५५) एक घोडी प्रथम दिवशी १५ कोस दु० दि० विश्रांति घेऊन, तिसरे दि०  
२० कोस या प्रमाणे उत्तराने चढती चले, आणि शिंगरुं प्रथम दिवशी  
२३ दुसरे दिवशी ५ या प्रमाणे २३ उत्तराने चढते चले, तर त्यांची गांड  
निघाल्या पासून कितवे दिवशी पडेल? उत्तर ११ दि०

(५६) अजवळ १५ मोत्ये आणि कजवळ ११ हिरे होते, त्यातून अने ५ मो-  
त्ये कला दिली आणि कने ४ हिरे अला दिले. पुढे त्यांची त्यांनी विक्री केली  
त्यावेळी प्रत्येकास ४४५० रुपये मिळाले, तेव्हा मोत्ये व हिरे यांची किंम-  
त काय? प्रत्येकी मोत्ये व हिरे सारखे किंमतीचे होते. मो० कि० दि० कि०

उत्तर २६७ ५४५०

(५७) ती अंकरूप आकृति काय आहे? जीत ३६ वजा केले तर चुल्कम  
स्थिती होते, आणि जिला मूळ दोन अंकांचे बेरजेने भागिले तर ७३ भा-  
गाकार येतो. उत्तर ६२

(५८) एका प्रदार्थाची उष्णता मुळचे पेशी दर रोज २ अंश जाला वाटू

लागली व शीवटील दिवशीं १० अंश वाढली आणि वाढू लागल्या दिवसा पासून शीवटील दिवशीं पर्यंत एकंदर ९० अंश वाढली, तर ती किती दिवस वाढत होती?

उत्तर, ९ दि०

(५९) कांहीं सुलांनीं नऊनऊ पृष्ठें वाचून एक पुस्तक संपविले, दुसरे दिवशीं ७ सुलें कमी झाल्या सुलें तें पुस्तक संपविण्यास मल्लेक सुलां स ७ पृष्ठें जास्त वाचावीं लागलीं, तर पुस्तक किती पृष्ठांचें होतें?

उत्तर, १४४ पृ०

(६०) एकाजें आपलें सर्वद्रव्य अ, ब, क यांस दिलें तें असें - अला सर्व द्रव्याचे ३ हून १५० रु० कमी, बला ३ हून ५० रु० अधिक आणि कला ५० रु० तर तें सर्वद्रव्य किती होतें?

उत्तर, ७५० रु०

### बीजगणित.

(६१) गणित श्रेढींतील तीन संख्या काढ अशा की, पहिली आणि दुसरी यांचे बेरजेचा ३ आणि पहिली आणि तिसरी यांचे बेरजेचा ३ हे आठ या संख्ये बराबर आहेत.

उत्तर २०, १२, ४

(६२) एका सरदारानें आपली फौज चौर साळतिउभी केली तेव्हां १२० मनुष्ये शिबक राहिलीं, झणून वर्गाचे बाजूंत एक मनुष्य वाढविले तेव्हां ९१ मनुष्यांचा तोटा आला, तेव्हां फौज किती होती?

उत्तर, १२००

(६३) भूमिति प्रमाणान्त त्या चार संख्या काय आहेत? की जात पहिली आणि दुसरी यांची वजाबाकी १५ आणि तिसरी व चवथी यांची वजाबाकी ५४० आणि चौथी बेरीज ७७७

उत्तर, ३, १८, १०८, ६४८



४) अ आणि ब या दोन गांवांमधून क आणि ड हे दोन जासूद निघाले  
तेने परस्परांस भेटले, तेव्हां असें समजले कीं, क जितका चालला  
३ पेक्षा १० मैल कमीड चालला. पुढें कला ब गांवी जाण्यास १५  
मि. बडला अगांवी जाण्यास ६३ मि. लागली; तर त्या दोन गांवां  
त अ किती व मत्स्येकाची दर मिन्युटांत चाल किती?

उत्तर, १५०, अ, ७, ब, १ मैल.

(६५) जे पुर्ग घनाचे दुप्पट अग्नी संख्या कोणती? उत्तर, ३  
(६६) एका वृत्त, ब हे दोघे चाकर निर निराळे दरानें एकदां ब ठेवून ए  
काच दिवसा दिले, त्या वेळेस अचे ६ दिवस साडे झाले होते संपून  
त्याला १९ रु. मिळे व बला १०० रु. मिळाले, परंतु असें समजले कीं,  
अचे ६ दिवस रवा होता व बचे होते तर त्यां सारखे रु. मिळाले  
असते- तेव्हां पूर्वी मत्स्येकाची किती दिवस चाकरी झाली होती?

उत्तर, अ १४, ब २० दि.

(६७) एक सरदार राजाचे दीस निघाला, त्या राजाचे बाळास ५ दर  
वाजे होते त्या मत्स्येकाचे निमित्त फौजेस बाकी फौज आंत घेऊन  
गेला, राजानें त्या फौजेस पहिपास १ दुसऱ्यास २ या प्रमाणें एकउत्त  
रानें चढती पागोटी दिली; नंतर या सरदारानें बाहेर येऊन मत्स्येका  
एक एक या प्रमाणें देतो ती पागोटी सर्वा फौजेस पुरली तेव्हां सर्वा  
किती होती?

उत्तर, २०१६ सर्वा

(६८) अ आणि ब हे दोन जासूद मुंबईहून धारवाडास जा  
तां निम्न काळीं निघाले; त्या दोघांची ही चाल सारखी  
च रस्त्याने गेले. पुढें धारवाडा पासून ५० मैलांवर अ



(२०)

ला तो दोन तासांत ३ मैल चालतो. अ आणि सीं दोन तास चालला  
त्यास एक छकडा भेटला तो ४ तासांत ९ मैल चालतो पुढें तो चालला  
धारवाडा पासून ४५ मैलावर भेटला व ३१ मैलांवर येण्याचें १० मि  
न्युटें त्यास तो छकडा भेटला. यावरून अ धारवाडास पोहोचण्याचें  
धारवाडा पासून किती अंतरावर होता?

उत्तर, २५ अंतर.

(६९) ला दोन संख्या कोणत्या आहेत जांची वजाबाकी त्यांचे मधून १ नें अधि  
क आहे आणि जांचे वर्गांची बेरीज ६१ आहे. उत्तर, ३

(७०) एक काट कोन चौकोणा कृति गोळ्यांची रा आहेत, जिचे पायांती  
ल लांबी बाजूचे एक रांगेतील गोळे ४० आहेत त्या आकृतीत रा-  
णित त्रिकोण १५ आहेत, तेव्हां त्या सर्व रांगींतील किती आहेत?

उत्तर, १०४००

(६९) (७१) एका मनुष्यास वर्षाची मासि ५०० रु आहे ती सावकारास लावून  
री यांचे देऊन ३२०० रु घेणें आहेत, तर किती वर्षे मासि घेणें घ्यावी? ह्याने सा  
ठ या संख्ये वकारास दर वोंकडा ८ रु व्याज मिळेल उत्तर, १२२१० वर्षे.

(६९) एका दर साल ६०० रु रुपये चक्रवात् व्याजाचे दरानें कोहीं सुद्धल दुप्पट  
मनुष्यें शिल्लक पुरास किती वर्षे सुद्धल पाहिजे? उत्तर, १०० वर्षे.

६९ मनुष्यांचा दर रुपये दराचा मोहोरा आणि ५०० दराचा पुतळ्या देऊन २०००

फेडणें आहेत, तें किती प्रकारें फेडतां येईल? उत्तर, ९९ त ह्यानी

(६९) भूमि ति प्रमाणे व्याज दर साल दर वोंकडा ५ पोंडा प्रमाणे ५ वर्षे चालणाऱ्या  
आणि दुसरी यांची वजाबाकी आज काय किंमत होईल? उत्तर, १०३०००  
बाकी ५४० आणि जांची वे

उत्तर, ३१